Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles
Correction

Exercice 1 (Injection, surjection, bijection).
Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

<u>**Correction**</u>

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$ est surjective, mais pas injective ni bijective.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$ est injective mais pas surjective ni bijective.
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$ est surjective mais pas injective ni bijective.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$ est injective, surjective et bijective. .
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$ n'est ni surjective (l'intervalle $]0, 1[$ n'est pas couvert) ni injective ($f_6(x) = f_6(-x)$) ni bijective.

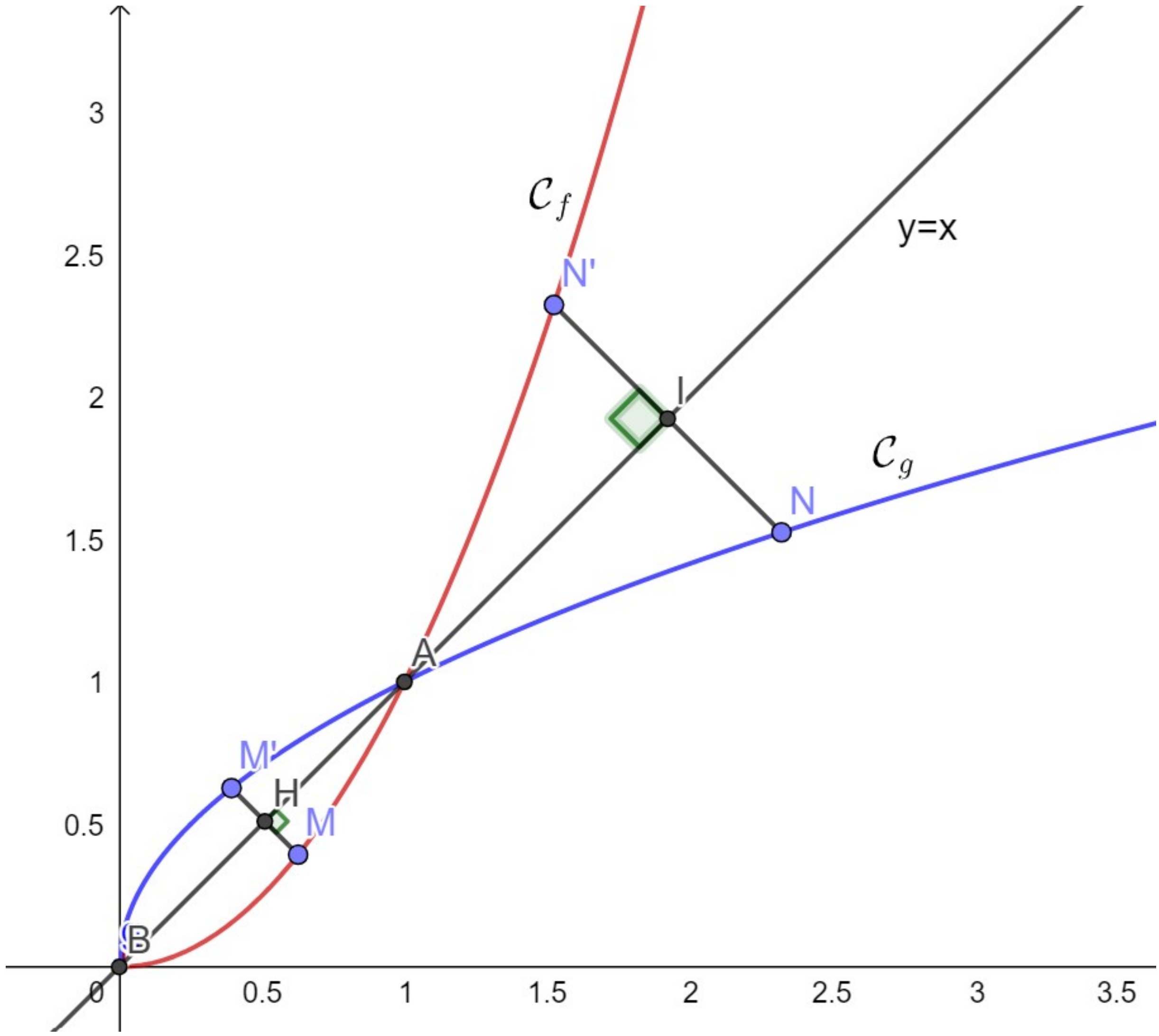
Exercice 2 (Trinôme).
Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a.
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$. Pourquoi ces deux courbes sont-elles symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$?

<u>**Correction**</u>

1. Si a est strictement positif, alors f est décroissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et croissante sur $[-b/(2a), +\infty[$. Si a est strictement négatif, alors f est croissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et décroissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
2. La courbe représentative de f est une parabole. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$. Algébriquement, cette propriété de symétrie se traduit par : pour tout réel h, on a
$$f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) = f\left(\frac{-b}{2a} - h\right).$$
3. On distingue suivant le signe du discriminant de f, noté Δ :
   — Si Δ est strictement négatif, alors, f ne s'annule pas et, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
   — Si Δ est nul, alors f n'annule en $-b/(2a)$ et est du signe de a sur $\mathbb{R}$ privé de $-b/(2a)$.
   — Si Δ est strictement positif, alors f s'annule en $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par r_1 et r_2, et du signe opposé sur l'intervalle formé par r_1 et r_2.

4. Consulter le graphique ci-dessous.



Soit M un point de la courbe représentative de f et N un point de la courbe représentative de g. Il faut montrer que le symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$ appartient à la courbe représentative de g, et que le symétrique N' de N par rapport à cette même droite appartient à la courbe représentative de f.

Soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan. Notons $A' = (y_0, x_0)$.

Le milieu du segment $[A, A']$ est de coordonnées $(\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{x_0+y_0}{2})$, donc il appartient à la droite D.

Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, dont le produit scalaire avec le vecteur $\vec{AA'}$ est nul. Le point A' est donc le symétrique de A par rapport D.

Revenons à M : notons x_0 l'abscisse de M. L'ordonnée de M est égale à x_0^2, et le symétrique M' de M par rapport à D a pour coordonnées (x_0^2, x_0). Par définition de f, x_0 est positif, donc $x_0 = g(x_0^2)$: le point M' appartient à la courbe représentative de g.

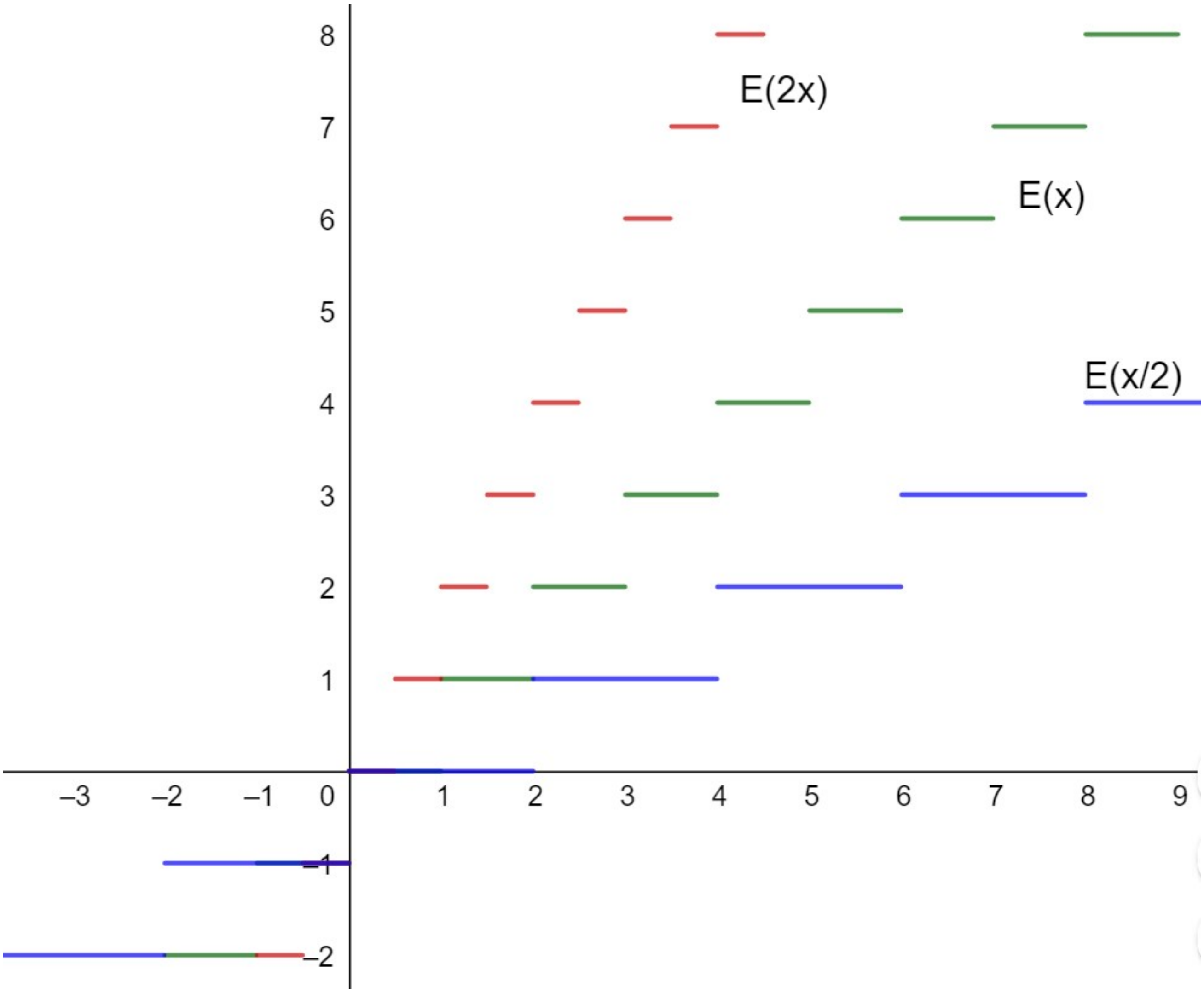
De même, étudions N et son symétrique par rapport à D. Notons x_1 l'abscisse de N. Son ordonnée est alors égale à $\sqrt{x_1}$, et le symétrique N' de N par rapport à D a pour coordonnées $(\sqrt{x_1}, x_1)$. On a bien $\sqrt{x_1} \geq 0$ et $x_1 = f(\sqrt{x_1})$, donc N' appartient à la courbe représentative de f.

Exercice 3 (Partie entière)**.**

On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

<u>**Correction**</u>

1. Par définition de E, l'image d'un réel par E est un entier relatif, donc $E(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. Réciproquement, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif k, on a $E(k) = k$, donc $\mathbb{Z}$ est inclus dans $E(\mathbb{R})$.
2. 0 est un entier relatif et $0 \leq 0.5 < 0 + 1$, donc $E(0.5) = 0$.
   De même, -2 est un entier relatif et $-2 \leq -1.5 < -2 + 1$, donc $E(-1.5) = -2$.
3. 

Exercice 4 (Trigo)**.** Calculer les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$
3. $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Correction

1. On a $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. On a $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
3. On a $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(-\dfrac{11\pi}{4} + 3\pi\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
4. On a
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1,$$
   et donc
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ on en déduit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

5. On a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

et comme $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ on en déduit

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 5 (Trigo - encore)**.**

Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x+y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x+y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin x$.
2. Montrer que $1+\sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

   (a) $f_1(x) = \cos^2 x$

   (b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

   (c) $f_3(x) = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

   (d) $f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

<u>**Correction**</u>

Soient x et y deux réels.

1. Soient x et y deux réels.
   On a $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
   On a également $\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y$, et $\sin(2x) = 2\sin x\ \cos x$.
2. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 + \sin x.\end{aligned}$$

3. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \sin(2(2x)) \\ &= 2\sin(2x)\ \cos(2x) \\ &= 4\sin x\ \cos x\ (2\cos^2 x - 1) \\ &= 8\sin x\ \cos^3 x - 4\sin x\ \cos x\end{aligned}$$

4. Soit x un réel n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour lequel $\tan x$ est bien défini.

   (a)

$$\begin{aligned}f_1(x) = \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x + 1}.\end{aligned}$$

   (b) On suppose de plus pour cette question que $|\sin x| \neq |\cos x|$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. On a :

$$f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^4 x - 1}$$

(c) On suppose de plus pour cette question que $\sin x \neq \cos x$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned}
f_3(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} &= \frac{\cos^3 x\ (\tan^3 x - 1)}{\cos x\ (\tan x - 1)} \\
&= \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 x}\left(\tan^2 x + \tan x + 1\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x &= \cos^2 x(1-\tan x) \\
&= \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Trigo - toujours !)**.**

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x :
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y,
$$\sin(y+\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :
$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction

1. Soient a et b deux réels. On a
$$\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b \qquad \text{et} \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
2. Soit x un réel. On a $\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
3. Soit y et θ deux réels. On a $\sin(y+\theta) = \cos\theta\ \sin y + \sin\theta\ \cos y$.
On remarque qu'en choisissant $\theta = \pi/4$, on obtient :
$$\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y.$$
4. Soit y un réel. On remarque que
$$\begin{aligned}
\sin y + \cos y &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y\right) \\
&= \sqrt{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$
On a donc $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $\left\{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7 (Composition)**.**

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \to K$ et $g : I \to J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

(a) $x \mapsto (1+2x)^2$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; (c) $x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Correction

1. Le plus simple est probablement de distinguer quatre cas suivant les sens de variation de f et g. On remarque alors que $f \circ g$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et que $f \circ g$ est décroissante si l'une est croissante et l'autre décroissante.
2. Les décompositions proposées ne sont pas uniques ! Chacune des décompositions proposées fait intervenir la fonction carré, qui est bien entendu décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Soit $h_1 : x \mapsto (1+2x)^2$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction (affine et croissante) $x \mapsto 1+2x$ par la fonction carré $y \mapsto y^2$. La fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que h est croissante sur $[-0.5, +\infty[$ et décroissante $]-\infty, -0.5]$.
   (b) Soit $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction carré par la fonction $y \mapsto 1/(1+y)$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction h_2 est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Soit $h_3 : x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Exercice 8 (Image directe, image réciproque).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f([0,3])$.
2. $f^{-1}([0,4])$
3. $f^{-1}([-1,4])$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4])$
5. $\sin([0,\pi])$
6. $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$
7. $\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$
8. $\tan^{-1}([-1,1])$.
9. $E([-1.5,1.5])$.
10. $E^{-1}([-1,1] \cup \{2\})$.

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.
Déterminons les ensembles suivants :

1. $f([0,3]) = [0,9]$.
2. $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$
3. $f^{-1}([-1,4]) = [0,2]$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4]) = [-2,-\sqrt{4}2] \cup [\sqrt[4]{2},2]$.
5. $\sin([0,\pi]) = [0,1]$.
6. On utilise le fait que la fonction sin est de période 2π et que $\pi/6$ et $5\pi/6$ sont les 2 réels x de $[-\pi,\pi]$ tels que $\sin x = 1/2$. On a donc : $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
7. On utilise la périodicité de la fonction sin et le fait que $\sin[-\pi/6,\pi/6] = [-1/2,1/2]$ et $\sin[5\pi/6,7\pi/6] = [-1/2,1/2]$. On obtient :
$$\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \bigcup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right].$$
8. On utilise la périodicité de la fonction tan, sa monotonie sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et le fait que $\tan[-\pi/4,\pi/4] = [-1,1]$. On en déduit :
$$\tan^{-1}([-1,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right].$$
9. $E([-1.5,1.5]) = \{-2,-1,0,1\}$.
10. $E^{-1}([-1,1] \cup \{2\}) = E^{-1}(\{-1,0,1,2\} = [-1,3[$.

Exercice 9 (Réciproque de fonctions circulaires).

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.
   Exprimer $f^{-1} : [-1, 1] \to [2\pi, 3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.
   Exprimer $g^{-1} : [-1, 1] \to [\pi, 2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Correction

1. La fonction cos est 2π-périodique, donc pour tout réel x, on a $\cos(x - 2\pi) = \cos x$.
   La fonction arccos a pour ensemble image l'intervalle $[0, \pi]$, donc pour tout x de $[2\pi, 3\pi]$, on a
   $$x = 2\pi + \arccos(\cos(x)) = 2\pi + \arccos(f(x))$$
   La fonction réciproque de f est donc la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-1, 1]$ par $\tilde{f}(t) = 2\pi + \arccos(t)$.
2. Soit t un réel de $[-1, 1]$. Notons $u = \arccos(t)$. On sait que u appartient à $[0, \pi]$, que $\cos(u) = \cos(2\pi - u)$, et que $2\pi - u$ appartient à $[\pi, 2\pi]$.
   On a donc $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$.
   On a donc, pour tout $t \in [-1, 1]$, $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$

Exercice 10 (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul)**.**
Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

Correction

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
4. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
8. $\tan(\arctan(3)) = 3$.

Exercice 11 (Dérivée)**.**
Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \cos^2(3x)$
4. $f_4 : x \mapsto \tan(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1-x}{2+x}$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$
8. $f_8 : x \mapsto \ln(1 + x^4)$
9. $f_9 : x \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
10. $f_{10} : x \mapsto \ln|\cos x|$

Correction

1. La fonction sin est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction carré aussi. La fonction f_1 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on a, pour tout réel x, $f_1'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.
2. Par les mêmes arguments, on justifie que f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_2'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$.
3. La fonction f_3 est la composée d'une fonction linéraire, de la fonction cos et de la fonction carré : elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_3'(x) = 3 \cdot 2 \cdot -\sin(3x) \cdot \cos(3x) = -3\sin(6x)$.

4. La fonction tan est définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où k est un entier relatif, donc f_4 est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ et sur tout intervalle de la forme $\left]\sqrt{k\pi-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right[$, ou $\left]-\sqrt{k\pi-\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right[$ pour k un entier naturel non nul.
La dérivée de la fonction tan étant la fonction $1+\tan^2$, on a, pour tout x tel que f_4 est bien définie : $f_4'(x) = 2\cdot x\cdot(1+\tan^2(x^2))$
5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, et pour tout réel x différent de 2, on a $f_5(x) = -1+\frac{3}{2+x}$ donc
$$f_5'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}$$
6. La fonction f_6 est définie pour tout x de $[-1,1]$, et dérivable (au moins) pour tout x de $]-1,1[$: par dérivée d'une fonction composée, on a
$$f_6'(x) = -2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-1/2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
On peut vérifier que f_6 n'est pas dérivable à gauche en 1 et à droite en -1 en étudiant le taux d'accroissement. On a par exemple, pour tout $h\in]0,2]$
$$\begin{aligned}\frac{f_6(1-h)-f_6(1)}{-h} &= -\frac{\sqrt{1-(1-h)^2}-1}{h}\\ &= -\frac{\sqrt{2h-h^2}}{h}\\ &= -h^{-1/2}\sqrt{2-h}\end{aligned}$$
Le taux d'accroissement diverge lorsque h tend vers $0+$, donc f_6 n'est pas dérivable (à gauche) en 1. De même, f_6 n'est pas dérivable à droite en -1.
7. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x : $f_7'(x) = 2e^{2x+1}$.
8. La fonction ln étant définie et dérivable sur $[1,+\infty[$, la fonction f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_7'(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}$.
9. La fonction f_9 est définie et dérvable pour tout x différent de -1 et 1. Sa dérivée est un peu plus simple à calculer si on utilise les propriétés de la fonction ln :
Pour tout réel x différent de 1 et -1, on a $f_9(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$.
donc $f_9'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$.
10. La fonction f_{10} est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos(x)$ est non nul, c'est-à-dire, pour tout x n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $f_{10}'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Exercice 12 (Fonctions hyperboliques)**.**
Montrer que pour tous réels u et v, on a :
$$\begin{aligned}\cosh^2 u+\sinh^2 v = \sinh^2 u+\cosh^2 v = \cosh(u+v)\cosh(u-v)\\ \cosh^2 u-\cosh^2 v = \sinh^2 u-\sinh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)\end{aligned}$$

<u>**Correction**</u>
Soient u et v deux réels.
On a
$$\begin{aligned}\cosh^2 u+\sinh^2 v &= \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}+e^{-2u}+2+e^{2v}+e^{-2v}-2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de u et v dans cette dernière expression, on déduit que $\cosh^2 u + \sinh^2 v = \cosh^2 v + \sinh^2 u$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\cosh(u+v)\cosh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v}+e^{-u-v}\right)\times\left(e^{u-v}+e^{v-u}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v}+e^{u+v+v-u}+e^{-u-v+u-v}+e^{-u-v+v-u}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}+e^{2v}+e^{-2v}+e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

De la même façon, et toujours pour deux réels u et v quelconques :

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}+e^{-2u}+2-e^{2v}-e^{-2v}-2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\sinh(u+v)\sinh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v}-e^{-u-v}\right)\times\left(e^{u-v}-e^{v-u}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v}-e^{u+v+v-u}-e^{-u-v+u-v}+e^{-u-v+v-u}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u}-e^{2v}-e^{-2v}+e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$.

De plus, on utilise la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= 1+\sinh^2 u - (1+\sinh^2 v)\\ &= \sinh^2 u - \sinh^2 v.\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure à la double égalité.

Exercice 13 (Équation - Fonctions hyperboliques)**.**

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Correction

1. On a

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2}+e^{-(\ln 3)/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((3^{1/2}+3^{-1/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3+1}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2}-e^{-(\ln 3)/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2}-3^{-1/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3-1}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

2. Notons $u = \dfrac{1}{2}\ln(3)$.
   Pour tous réels a et b, on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sin h \cdot \sinh b$, donc, pour tout réel x, on a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

   Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(5x)$.
   Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés.
   On a donc

$$\begin{aligned}\cosh(x+u) = \cosh(5x) &\iff x+u = 5x \text{ ou } x+u = -5x\\ &\iff 4x = u \text{ ou } -6x = u\\ &\iff x = \frac{u}{4} \text{ ou } x = -\frac{u}{6}\end{aligned}$$

   L'ensemble des réels x vérifiant $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x)$ est donc

$$\left\{\frac{\ln 3}{8}, -\frac{\ln 3}{12}\right\}$$

Exercice 14 (Limite - exp)**.**

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend ers $+\infty$?

<u>Correction</u>

1. Soit a un réel.
   Si a appartient à $]-1, 1[$, alors (a^n) tend vers 0.
   Si $a = 1$, alors (a^n) est la suite constante égale à 1.
   Si $a > 1$, alors (a^n) diverge vers $+\infty$.
   Si $a \leq -1$, alors (a^n) diverge.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est bien définie lorsque a est positif. Sa limite est la même que la limite de la suite (a^n).

Exercice 15 (Limites - Opérations)**.**
Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x^5}{1+x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{1+x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}+5}{x^2+\cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ \ln(2x+3)$
6. $f_6 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

<u>Correction</u>

1. Pour tout x, $\dfrac{x^2+2x^5}{1+x^4} = \dfrac{x^5}{x^4}\,\dfrac{2+x^{-3}}{1+x^{-4}}$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{x^2+2x^5}{1+x^4} = +\infty$.
2. Pour tout x, $\dfrac{x\sin x + x^2}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{x^2}\dfrac{1+x^{-1}\sin x}{1+x^{-2}}$ donc $\displaystyle\lim_{\infty} f_2(x) = 1$.
3. Pour tout $x \geq 1$, $f_3(x)$ est bien définie et $\dfrac{x\sqrt{x}+5}{x^2+\cos x} = \dfrac{x^{3/2}}{x^2}\,\dfrac{1+5x^{-3/2}}{1+x^{-2}\cos x}$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f_5(x) = 0$.

4. Pour tout $x \geq 1$, $f_4(x)$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{+\infty} f_4(x) = 0$.

5. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln \frac{2x+3}{x}$.
De plus, la limite en $+\infty$ de $x^{-1}\ln(x)$ est nulle, et celle de $\ln \frac{2x+3}{x}$ est égale à $\ln 2$.
Donc $\lim_{+\infty} f_5(x) = 0$.

6. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et lorsque u tend vers 0, $\sin u$ tend vers 0.
Donc, par composition de limites, $\lim_{+\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$

7. Pour tout $x > 0$, $f_7(x) = x \times \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)$.
La fonction cos étant bornée, le théorème des gendarmes permet de justifier que $\lim_{+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.
Donc $\lim_{+\infty} f_7(x) = +\infty$.
NB : on peut tout aussi bien minorer $f_7(x)$ par $x-1$, et utiliser une comparaison de limites.

8. On commence par expliciter f_8 à l'aide de la fonction exponentielle : pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
f_8(x) &= e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \\
&= \frac{1}{8}e^{-x} \ \left(e^{3x}+3e^{x}+3e^{-x}+e^{-3x} - \left(e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}-e^{-3x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}e^{-x} \ \left(6e^{x}+2e^{-3x}\right) \\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_8(x) = \frac{3}{4}$.

9. Pour tout réel x, $\cosh x$ est strictement positif, donc $f_9(x)$ est bien défini.
Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}
f_9(x) &= x - \ln(\cosh x) \\
&= x - \ln \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\
&= x - \ln \left(\frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{2}\right) \\
&= x - \ln(e^x) - \ln\left(1+e^{-2x}\right) + \ln 2 \\
&= -\ln\left(1+e^{-2x}\right) + \ln 2
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_9(x) = \ln 2$.

Exercice 16 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**

1. Montrer que pour tout y réel il existe un unique x réel tel que $y = \sinh(x)$, et exprimer x en fonction de y. sinh est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note sa bijection réciproque argsinh.

2. Calculer la dérivée de argsinh.

Correction

1. Soit y un réel. Déterminons x tel que $\sinh(x) = y$.
   On a
   $$\begin{aligned} y = \sinh(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - 2y \times e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$
   Il s'agit d'une équation de degré 2 en la variable $X = e^x$: il nous faut donc déterminer les racines positives de cette équation.
   Déterminons les racines de $X^2 - 2yX - 1 = 0$: il s'agit d'un trinôme en X, dont le discriminnt Δ est égal à $\Delta = 4y^2 + 4$ qui est toujours strictement positif.
   Les racines de ce trinôme sont donc
   $$r_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}.$$
   Pour toute valeur de y on remarque que r_1 est négative et r_2 est positive.
   En posant $x = \ln X$, on obtient l'antécédent de y par sinh :
   $$\operatorname{argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$
2. La fonction argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout y réel on a :
   $$\begin{aligned} \operatorname{argsinh}'(y) &= \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right) \times \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+y^2} + y}{\left(\sqrt{1+y^2} \times (y + \sqrt{1+y^2})\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 17 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**
Donner les dérivées des fonctions suivantes, là où elles sont définies et dérivables :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arccos(\cos(x))$. Calculer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi\}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$. Calculer sa dérivée $g'(x)$ pour tout x où g est dérivable.
3. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$
4. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$
5. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$

Correction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arccos(\cos(x))$.
   Cette fonction est la composée de deux fonctions continues (et définies sur des ensembles compatibles), donc elle est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\sin x$, et la fonction $u \mapsto \arccos u$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $u \mapsto -(1-u^2)^{-1/2}$.
   La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash(\pi\mathbb{Z})$, de dérivée :
   $$f'(x) = -\frac{-\sin x}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \operatorname{sgn}(\sin x).$$
   On étudie la dérivabilité en 0 (la situation en $x = k\pi$, pour un entier naturel k est similaire) : on calcule le taux d'accroissement en distinguant les cas $x \in]0,\pi[$ et $x \in]-pi, 0[$:

1er cas : $x \in]0,\pi[$.
Alors $\arccos(\cos x) = x$ et

$$\begin{aligned}\frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x-0} &= \frac{x}{x}\\ &= 1\end{aligned}$$

2ème cas : $x \in]-\pi, 0[$.
Alors $\arccos(\cos x) = -x$ et

$$\begin{aligned}\frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x-0} &= \frac{-x}{x}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement lorsque x tend vers 0 existent mais sont différentes, donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 (ni en $k\pi$ pour k un entier).

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arcsin(\sin(x))$.
Cette fonction est la composée de deux fonctions continues et définies sur des ensembles compatibles, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos x$, et la fonction $u \mapsto \arcsin u$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^2}$.
La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, et de dérivée

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

Comme dans la question précédente, on peut calculer les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en $\pi/2$ (ou en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k) : on remarque que pour tout réel, $\sin(\pi/2 + h) = \sin(\pi/2 - h)$.
1er cas : Soit $h \in]0,\pi[$. On a

$$\begin{aligned}\frac{g(\pi/2+h) - g(\pi/2)}{h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2+h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{h}\\ &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - (\pi/2)}{h}\\ &= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{h}\\ &= -1\end{aligned}$$

2ème cas : Soit $h \in]0,\pi[$. On a

$$\begin{aligned}\frac{g(\pi/2-h) - g(\pi/2)}{-h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{-h}\\ &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - (\pi/2)}{h}\\ &= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{-h}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc le taux d'accroissement de g admet des limites différentes à droite et à gauche de $\pi/2$: g n'est donc pas dérivable en $\pi/2$ (ni en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k).

3. La fonction $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$ est continue $\mathbb{R}$ et dérivable en tout réel x pour lequel $t \mapsto \arcsin t$ est dérivable en $t = \cos x$, donc pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$.
On a alors :

$$(\arcsin(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|} = -\operatorname{sgn}(\sin x).$$

Comme dans l'exercice précédent, on peut vérifier la non dérivabilité en $k\pi$, pour k un entier.
On aurait aussi pu utiliser les résultats de l'exercice précédent ainsi que la relation $\arcsin t + \arccos t = \pi/2$.

4. La fonction $x \mapsto \arccos(\sin(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout x pour lequel $t \mapsto \arccos t$ est dérivable en $t = \sin x$, donc pour tout $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
On a alors :

$$(\arccos(\sin x))' = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} = -\operatorname{sgn}(\cos x).$$

5. Soit k un entier. La fonction $x \mapsto \tan x$ continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$ est continue et dérivable sur ce même intervalle.
   Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, on a $\arctan(\tan x) = x - k\pi$, donc la dérivée de $x \mapsto \arctan(\tan x))$ est constante égale à 1.
   La fonction $x \mapsto \arctan(\tan x))$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ puisqu'elle n'est pas définie (ni prolongeable par continuité) en ce point.
6. Les deux fonctions $t \mapsto \arctan t$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \arctan(\sin x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a :
$$(\arctan(\sin x))' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$