Licence 1 Mathématiques Informatique.

ANALYSE 1 POUR INFORMATICIENS

Christophe Poquet

Année universitaire 2023/2024

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

est *l'ensemble des entiers naturels*. Si l'on enlève le 0 on définit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls*.

1.1.2 Les entiers relatifs

En ajoutant les entiers négatifs on définit *l'ensemble des entiers relatifs* par

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

De même, si l'on enlève le 0, on définit $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers relatifs non nuls*.

Remarque 1.1.

1. *On remarque que l'ensemble $\mathbb{N}$ est* **inclus** *dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :*
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$
où le symbole $\subset$ se lit « est inclus dans ». En effet, tout élément de $\mathbb{N}$ est également élément de $\mathbb{Z}$, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :
$$\textit{si} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{alors} \quad n \in \mathbb{Z},$$
où le symbole $\in$ se lit « appartient à ».
2. *On voit immédiatement que l'inclusion réciproque est fausse, c'est-à-dire $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, puisque par exemple $-1 \in \mathbb{Z}$ alors que $-1 \notin \mathbb{N}$.*
3. *Attention à ne pas confondre les symboles $\subset$ et $\in$!*

1.1.3 Les nombres rationnels

On définit *l'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des fractions d'entiers naturels :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarque 1.2.

1. *Puisque tout entier relatif* n *peut être écrit sous la forme*

$$n = \frac{n}{1},$$

on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. *Un nombre rationnel peut être représenté par différentes fractions, par exemple* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$ *Plus précisément, pour* $a, a' \in \mathbb{Z}$ *et* $b, b' \in \mathbb{Z}^*$, *on a*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \textit{si et seulement si} \quad ab' = a'b.$$

Attention, l'expression « P si et seulement si Q », que l'on peut abréger en « P ssi Q » ou « P $\Leftrightarrow$ *Q » (voir le cours d'Algèbre 1), signifie deux choses : « si P est vraie alors Q est vraie » et « si Q est vraie alors P est vraie ».*

1.1.4 Les nombres décimaux

On définit *l'ensemble des nombres décimaux* $\mathbb{D}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il s'agit des nombres ayant une suite **finie** de chiffres à droite de la virgule.

Remarque 1.3.

1. *Tous les éléments de* $\mathbb{D}$ *peuvent être écrit sous forme de fraction, et donc* $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. *L'inclusion réciproque est fausse, puisque certaine fractions ne peuvent être écrites qu'avec une infinité de chiffres après la virgule, comme par exemple*

$$\frac{1}{3} = 0.333333333333333333333333\dots$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ donne un rôle privilégié au nombre 10 (les dix doigts des mains). Du point de vue des mathématiciens, les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont plus importants.

1.1.5 Les nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est composée de

- un signe $+$ ou $-$ (généralement omis lorsque c'est le $+$),
- une suite finie de chiffres entre 0 et 9, ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0,
- une virgule,
- une suite infinie de chiffres entre 0 et 9.

Exemples 1.4. *Par exemple* 0, 4, -10.3, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π *sont des nombres réels.*

Remarque 1.5.

1. *Attention avec cette définition un réel ne s'écrit pas de manière unique, par exemple* $1 = 1.0$, $0 = 0.0 = -0 = -0.00$, $1 = 0.99999999999\dots$
2. *On a l'inclusion* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, *mais l'inclusion réciproque est fausse, on ne peut par exemple pas écrire* $\sqrt{2}$ *comme* $\frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}^*$ *(voir le cours d'Algèbre 1).*

1.2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels

Dans l'enfance on apprend à additionner, multiplier et comparer les entiers. Ceci s'étend aux nombres réels (résultat admis, fastidieux à démontrer).

Proposition 1.6. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ (ou $\times$) qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et ont les propriétés suivantes :*

1. **commutativité :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a+b=b+a \quad \text{et} \quad a\cdot b=b\cdot a,$$
2. **associativité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \text{et} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,$$
3. **distributivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$$
4. **éléments neutres :** *pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a*
$$a+0=a \quad \text{et} \quad a\cdot 1=a,$$
5. **élément absorbant :** *pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a*
$$a\cdot 0=0.$$

Proposition 1.7. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leqslant$ qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. **réflexivité :** *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a\leqslant a,$$
2. **antisymétrie :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a\leqslant b \quad \text{et} \quad b\leqslant a, \quad \text{alors} \quad a=b,$$
3. **transitivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a\leqslant b \quad \text{et} \quad b\leqslant c, \quad \text{alors} \quad a\leqslant c,$$
4. **ordre total :** *pour tous a,b dans $\mathbb{R}$,*
$$a\leqslant b \quad \text{ou} \quad b\leqslant a,$$
5. **compatibilité avec l'addition :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a\leqslant b \quad \text{alors} \quad a+c\leqslant b+c,$$
6. **compatibilité avec la multiplication :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a\leqslant b \quad \text{et} \quad c\geqslant 0, \quad \text{alors} \quad a\cdot c\leqslant b\cdot c.$$

Remarque 1.8. *En mathématiques le* « ou » *est inclusif :* « *A ou B* » *signifie soit A, soit B, soit les deux.*

$a\leqslant b$ se lit « a inférieur ou égal à b ». On écrit de plus, pour a, b dans $\mathbb{R}$

- $a\geqslant b$ (qui se lit « a supérieur ou égal à b ») si $b\leqslant a$,
- $a<b$ (qui se lit « a strictement inférieur à b ») si $a\leqslant b$ et $a\neq b$,
- $a>b$ (qui se lit « a strictement supérieur à b ») si $b<a$.

On remarque que le contraire de $a\leqslant b$ est $a>b$.

Remarque 1.9.

1. *On ne peut pas soustraire des inégalités : on a $2\leqslant 3$ et $1\leqslant 4$ mais $2-1=1$ n'est pas inférieur ou égal à $3-4=-1$!*
2. *La multiplication par un réel négatif change le sens de l'inégalité : si a, b, c sont des réels,*
$$\text{si} \quad a\leqslant b \quad \text{et} \quad c\leqslant 0, \quad \text{alors} \quad a\cdot c\geqslant b\cdot c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 1.10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la* **valeur absolue** *de x, notée $|x|$, de la manière suivante :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.11. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max(-a, a),$$
2. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad a = 0,$$
3. *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$
4. **inégalité triangulaire :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$
5. **inégalité triangulaire inverse :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue.

Démontrons le point 4. Considérons deux réels a et b. D'après 1) on a $|a+b| = \max(a+b, -a-b)$. Mais comme $a \leqslant \max(-a, a) = |a|$ et $b \leqslant |b|$ on a $a + b \leqslant |a| + |b|$. De même, comme $-a \leqslant |a|$ et $-b \leqslant |b|$ on a $-a - b \leqslant |a| + |b|$. Ainsi

$$|a + b| = \max(a + b, -a - b) \leqslant |a| + |b|.$$

Finalement démontrons le point 5). Considérons à nouveaux deux réels a et b. D'une part d'après 4) on a $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$ et donc $|a-b| \geqslant |a|-|b|$. D'autre part on a $|b| = |b-a+a| \leqslant |b-a|+|a|$ et donc $|a - b| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. On en déduit bien

$$|a - b| \geqslant \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = ||a| - |b||.$$

□

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Intuitivement, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ».

Définition 1.12 (Intervalles de $\mathbb{R}$)**.** *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, pour tous x, y éléments de I, tout réel z vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$ est également un élément de I.*

Proposition 1.13. *Les intervalles I de $\mathbb{R}$ ont l'une des formes suivantes :*

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$, **l'ensemble vide**, *qui ne contient aucun élément,*
3. $\{a\}$, **un singleton**, *avec $a \in \mathbb{R}$,*
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, **un segment** , *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
5. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ *ou* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $]-\infty, a] == \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ *ou* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, *avec a réel.*

Remarque 1.14. *Dans les points 4., 5. et 6. de la proposition précédente les réels a et b sont appelés les* **bords** *de l'intervalle.*

1.5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.15. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de A.*

1. *On dit que a est* **le plus grand élément de** *A (ou* **maximum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \leqslant a$,*
2. *On dit que a est* **le plus petit élément de** *A (ou* **minimum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \geqslant a$.*

S'il existe, le plus grand élément de A est unique, on le note $\max(A)$. *De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique, on le note* $\min(A)$.

Exemples 1.16.

1. *Une partie finie A de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé d'un nombre fini d'éléments) a toujours un plus grand élément.*
2. 1 *est le plus grand élément de* $[0,1]$.
3. $\mathbb{N}$ *et* $[0,1[$ *n'admettent pas de plus grand élément.*

Définition 1.17. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et m un réel.*

1. *On dit que m est un* **majorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \geqslant a$.*
2. *On dit que m est un* **minorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \leqslant a$.*

Exemples 1.18.

1. 1 *et* 4 *sont des majorants de* $[0,1]$ *et* $[0,1[$,
2. $\mathbb{N}$ *n'a pas de majorant.*

Définition 1.19. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est*

1. **majorée** *si elle admet un majorant,*
2. **minorée** *si elle admet un minorant,*
3. **bornée** *si elle admet un majorant et un minorant.*

Exemples 1.20.

1. $[0,1]$ *et* $[0,1[$ *sont bornés,*
2. $[0,+\infty[$ *est minoré mais n'est pas borné.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.21 (Théorème de la borne supérieure)**.** *Toute partie A de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet un plus petit majorant, appelé la* **borne supérieure de** *A et noté* $\sup(A)$.

Exemple 1.22. *On a* $\sup([0,1]) = \sup([0,1[) = 1$.

Remarque 1.23. *Ce théorème n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$: l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ est majoré mais n'admet pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.*

De même, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors elle admet un plus grand minorant, appelée **borne inférieure de** A et noté $\inf(A)$.

Par convention, si A n'est pas majorée on note $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée on note $\inf(A) = -\infty$.

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.24 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Alors $M = \sup(A)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble* $A \cap]M-\varepsilon, M]$ [1] *est non vide.*

1. Pour deux ensembles A et B, $A \cap B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et B.

Bibliographie

[1] Cours de première année disponible en ligne sur le site https://les-mathematiques.net/serveur_cours/section/2/

[2] J.P. Ramis, A Warusfel, X. Buff, J Garnier, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, J. Sauloy, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*, Dunod, 3ème édition, 2018.

[3] Notes de cours d'analyse 1 pour Informaticiens de Guillaume Aubrun.