Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle terminal, session 2

Lundi 1er juillet 2024 – Durée : 1h30.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = \ln(1 + e^x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

   Solution: Faux. $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. $\frac{\sin(4^n)+n^2}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   Solution: Faux. On a l'encadrement

$$\frac{-1+n^2}{4^n} \leq \frac{\sin(4^n)+n^2}{4^n} \leq \frac{1+n^2}{4^n},$$

   et donc $\frac{\sin(4^n)+n^2}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $-1+n^2$ et $1+n^2$ sont négligeables devant 4^n.

3. $(2n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{=} O(n^2)$.

   Solution: Vrai. En effet

$$\frac{(2n+1)^2}{n^2} = \frac{4n^2+4n+1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

4. $e^{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(e^{n^2}\right)$.

   Solution: Faux. En effet,

$$\frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = \frac{e^{n^2+2n+1}}{e^{n^2}} = e^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 2 : On fixe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \cos(\theta)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

1. Montrer que l'on peut bien définir de cette manière u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Solution: On procède par récurrence. On peut bien définir u_0, et comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $u_0 \geq 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on peut définir u_n et que de plus $u_n \geq 0$. Mais alors $\dfrac{1+u_n}{2} \geq 0$, ce qui implique que l'on peut bien définir $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$, et que de plus $u_{n+1} \geq 0$. On en déduit que l'on peut bien définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(u)}{2}} \quad \text{et} \quad \cos(u) = \frac{\sin(2u)}{2\sin(u)}.$$

Solution: Soit $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'une part, d'après le cours,

$$\cos(u) = \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - 1,$$

ce qui donne

$$\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1 + \cos(u)}{2}.$$

Mais comme $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ implique $\frac{u}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{u}{2}\right) \geq 0$, on en déduit

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(u)}{2}}.$$

D'autre part, d'après le cours on a $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$, et comme $\sin(u) \neq 0$ puisque $\frac{u}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ on obtient bien

$$\cos(u) = \frac{\sin(2u)}{2\sin(u)}.$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

Solution: On procède par récurrence. On a bien $u_0 = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right)$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. on suppose que $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. Mais alors $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}}$, et comme $\frac{\theta}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on peut appliquer la question précédente avec $u = \frac{\theta}{2^n}$ pour en déduire que $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. On a donc bien montré que $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite, et si oui laquelle ?

Solution: Comme $\frac{\theta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue en 0 et vérifie $\cos(0) = 1$, on déduit

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$v_n = \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^i}\right).$$

En appliquant n fois la question 2) en prenant $u = \frac{\theta}{2^i}$ il vient

$$v_n = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)} \cdots \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)},$$

et donc après simplification on obtient bien

$$v_n = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite, et si oui laquelle ?

Solution: De plus, comme $\frac{\theta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

Exercice 3 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Dans cette question l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

(a) Calculer f_n' et déterminer le tableau de variations de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

Solution: Pour tout $x \in]0,1[$ on a $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2(1-x)$. Mais pour $x \in]0,1[$ on a $x^{n-1} > 0$ et $(1-x) > 0$, et donc $f_n'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

(b) Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ satisfaisant $f_n(\alpha_n) = 0$.

Solution: Comme $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ et f est strictement croissante sur $[0,1]$, f est bijective de $[0,1]$ sur $[-1,1]$. Il existe donc un unique antécédent de 0 par f, qui appartient à $]0,1[$, que l'on note α_n.

(c) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$ et montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$. Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?

Solution: On a $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1-\alpha_n)^2$, et comme $\alpha_n \in]0,1[$ on a $\alpha_n^{n+1} < \alpha_n^n$ et donc

$$f_{n+1}(\alpha_n) < \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 = f_n(\alpha_n) = 0.$$

Donc $f_{n+1}(\alpha_n)$ est strictement négatif.

2. (a) En utilisant la question précédente, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$. Mais comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ et $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, on en déduit que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. La suite est donc strictement croissante.

(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera sa limite α.

Solution: La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente.

(c) Montrer que si l'on suppose $\alpha < 1$, alors dans ce cas $\alpha_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on en déduire ?

Solution: Si l'on suppose $\alpha < 1$, alors comme $\alpha_n \leq \alpha$ pour tout $n \geq 1$ on a

$$0 \leq \alpha_n^n \leq \alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc sous cette hypothèse $\alpha_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais alors

$$0 = f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-\alpha)^2.$$

Au final on trouve $0 = (1-\alpha)^2$, c'est-à-dire $\alpha = 1$. On aboutit à une contradiction. On en déduit que $\alpha \geq 1$ et comme $\alpha_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ il est clair que $\alpha \leq 1$, donc en conclusion $\alpha = 1$.