Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

# Contrôle terminal, session 2

*Lundi 1er juillet 2024 – Durée : 1h30.*

*Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.*

**Exercice 1 :** Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = \ln(1+e^x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
2. $\frac{\sin(4^n)+n^2}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. $(2n+1)^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$.
4. $e^{(n+1)^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{n^2}\right)$.

**Exercice 2 :** On fixe $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \cos(\theta)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

1. Montrer que l'on peut bien définir de cette manière $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $u \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(u)}{2}} \quad \text{et} \quad \cos(u) = \frac{\sin(2u)}{2\sin(u)}.$$
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite, et si oui laquelle ?
4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$
   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite, et si oui laquelle ?

**Exercice 3 :** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Dans cette question l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Calculer $f_n'$ et déterminer le tableau de variations de $f_n$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in ]0,1[$ satisfaisant $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$ et montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$. Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$ ?
2. (a) En utilisant la question précédente, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera sa limite $\alpha$.
   (c) Montrer que si l'on suppose $\alpha < 1$, alors dans ce cas $\alpha_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on en déduire ?