

## Outils analytiques

**Théorème de Darboux.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors pour tout  $c$  entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$  il y a  $x \in [a, b]$  avec  $f'(x) = c$ .

**Démonstration :** Si  $c = f'(a)$  ou  $c = f'(b)$ , rien à démontrer. Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer  $f'(a) > f'(b)$ ; en remplaçant  $f(x)$  par  $f(x) - cx$  on peut supposer  $f'(a) > c = 0 > f'(b)$ .

Puisque  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$  il y a  $a < a' < b$  avec  $f'(a') > f'(a)$ . De même, il y a  $a < b' < b$  avec  $f'(b') > f'(b)$ . Par le théorème du maximum il y a  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x)$  est maximal. Mais ni  $f(a)$  ni  $f(b)$  sont maximaux. Ainsi  $x \in ]a, b[$  et  $f'(x) = 0$ .  $\square$

**Deuxième théorème des accroissements finis.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il y a  $c \in ]a, b[$  avec

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

**Remarque.** Si  $g' \neq 0$  sur  $]a, b[$  et  $g(a) \neq g(b)$ , on réécrit la conclusion comme

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Démonstration :** On pose

$$h(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)].$$

Alors  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , avec  $h(a) = h(b) = 0$ . D'après le théorème de Rolle il y a  $c \in ]a, b[$  avec

$$0 = h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c).$$

Le théorème en découle.  $\square$

**Règle de l'Hospital (ou de l'Hôpital).** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles dérivables sur  $]a, b[$ , tel que  $g' \neq 0$  sur  $]a, b[$ . Si  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$  et  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, alors

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Remarque.** En remplaçant  $f(x)$  et  $g(x)$  par  $f(-x)$  et  $g(-x)$ , on obtient les théorèmes analogues pour  $x \rightarrow a$ .

**Démonstration :** On note d'abord que si  $b = \infty$  et le théorème est vrai pour  $b \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = f(\frac{1}{x})$  et  $G(x) = g(\frac{1}{x})$ . Alors avec  $y = \frac{1}{x}$  on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})(-y^{-2})}{g'(\frac{1}{y})(-y^{-2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

On peut donc supposer  $b \in \mathbb{R}$ .

*1er cas :*  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ . On prolonge  $f$  et  $g$  en  $b$  par continuité, avec  $f(b) = g(b) = 0$ . Puisque  $g' \neq 0$  sur  $]a, b[$ , le théorème de Rolle implique que  $g \neq 0$  sur  $]a, b[$ . D'après le deuxième théorème des accroissements finis, pour tout  $x \in [a, b]$  il y a  $c_x \in ]x, b[$  avec

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Or, si  $x \rightarrow b$  alors  $c_x \rightarrow b$  également. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2ème cas :  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ . Soit  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ . Pour tout  $1 > \epsilon > 0$  il y a  $a < c < b$  tel que pour  $x \in ]c, b[$  on a

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

D'après le deuxième théorème des accroissements finis pour tout  $x \in ]c, b[$  il y a  $y \in ]c, x[$  tel que

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Ceci donne

$$\frac{\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(x)}} = \frac{f'(y)}{g'(y)},$$

soit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \left( 1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ . Il y a donc  $d \in ]c, b[$  tel que pour  $x \in ]d, b[$  on a

$$\left| \frac{g(c)}{g(x)} \right| \leq \frac{\epsilon}{3(|\ell| + 1)} \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(c)}{g(x)} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| &= \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \left( 1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c)}{g(x)} - \ell \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell \right| + \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \cdot \frac{g(c)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(c)}{g(x)} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + (|\ell| + 1) \frac{\epsilon}{3(|\ell| + 1)} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .  $\square$

**Remarque.** Le théorème original est pour une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, avec  $f(b) = g(b) = 0$  et  $g'(b) \neq 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$ . Ceci se démontre aisément :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \frac{x - b}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$