Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2023–2024

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 5

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

a) la fonction f s'annule ;

b) la fonction f est toujours nulle ;

c) f n'est pas une fonction constante ;

d) f est croissante ;

e) f est décroissante ;

f) f présente un minimum ;

g) f présente un maximum.

Exercice 2. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :

   a) $A \subseteq B$ b) $A \cap B = A$ c) $A \cup B = B$ d) $A \setminus B = \emptyset$
3. Montrer l'équivalence des propositions :

   a) $A \cup B = A \cap C$ b) $B \subseteq A \subseteq C$
4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cap B \subseteq A \cap C) \implies B \subseteq C\ .$$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$

b) $g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$

c) $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, 4x-2y) \end{array}$

d) $k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 5. Soient :

$$f \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \qquad\qquad g \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}[A]$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 7. Soit f une application de E vers F avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est injective ; b) f est surjective ; c) f est bijective.

Exercice 8. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 9. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 10.
Soit E un ensemble, avec $\mathrm{Card}(E) = n$. Démontrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,

— en utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$;

— en raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

Exercice 12. Soient E,F deux ensembles non vides. Soient A une partie de E, B une partie de F et f une application de E dans F. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A est une partie finie de E, alors $f[A]$ est une partie finie de F.
2. Si $f[A]$ est une partie finie de F, alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F, alors $f^{-1}[B]$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}[B]$ est une partie finie de E, alors B est une partie finie de F.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'entiers $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

a) $n_1 + n_2 \leq n$, b) $n_1 + n_2 = n$.

Mêmes questions pour les triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. Pouvez-vous généraliser aux cas des $m-$uplets ?
Indication : il est utile et instructif de représenter les couples (n_1, n_2) dans le plan $\mathbb{R}^2$ et, pour la deuxième partie, les triplets (n_1, n_2, n_3) dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque, et f une application de E dans F.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Card}(f[E]) = \mathrm{Card}(E)$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Card}(f[E]) = \mathrm{Card}(F)$.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x \in f(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{Card}\, f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathrm{Card}\, f(a) = n$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{Card}\, f(x) \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que les ensembles $f(x)$ et $f(y)$ aient le même nombre d'éléments.

Exercice 16. Soit E un ensemble avec $\mathrm{Card}(E) = n$.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subseteq B\}$.
   Indication : pour chaque $B \subseteq E$, compter les parties $A \subseteq B$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subseteq B$ équivaut à $A^c \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$.

Exercice 17. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3| \,\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Exercice 18. Décrire les ensembles qui suivent.

a) $\tan[\{0\}]$

b) $\sin^{-1}[\{2\}]$

c) $\cos^{-1}\big[[0, 1]\big]$

d) $\left(\cos|_{[3,7]}\right)^{-1}\big[(0, 1)\big]$

e) $\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}\big[[0, 1]\big]$

f) $\sqrt{\cdot}\,\big[[0, 1]\big]$

g) $f^{-1}\big[[0, 1]\big]$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

h) $f^{-1}\big[[0, 1]\big]$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

i) $f^{-1}\big[[0, 1]\big]$ pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

j) $f^{-1}\big[[-1, 1[\cup\{2\}\big]$ et $f\big[[0, 1]^3\big]$ pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$

k) $|\cdot|\big[[-2, -1] \cup [2, 4[\big]$

l) $\left(|\cdot||_{[-8,7[}\right)^{-1}\big[[2, 3]\big]$

m) $|\cdot|^{-1}[\{1\}]$

n) $\exp\big[]-\infty, 2]\big]$

o) $\exp^{-1}\big[[-1, e]\big]$

p) $\ln[\mathbb{R}_-]$

q) $\ln^{-1}\big[[3, +\infty[\big]$

Exercice 19. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soient $A, B \subseteq E$. Montrer que
$$f\left[A \cup B\right] = f[A] \cup f[B] \quad \text{et} \quad f\left[A \cap B\right] \subseteq f[A] \cap f[B].$$
2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
3. Soient maintenant $A, B \subseteq F$. Montrer que
$$f^{-1}\left[A \cup B\right] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \quad \text{et} \quad f^{-1}\left[A \cap B\right] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

Exercice 20. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;

b) $[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$;

c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

d) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$;

e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

f) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

g) $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;

h) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$;

i) $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

Exercice 21. On considère l'application $f : I \to J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Trouver I et J tels que :

1. f est injective mais pas surjective ;
2. f est surjective mais pas injective ;
3. f est bijective.

Exercice 22. Soit E un ensemble non vide. Soient f, g et h des fonctions de E dans E. On suppose $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 23. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.

Exercice 24. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subseteq F$, $f(f^{-1}[B]) = B \cap f[E]$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f[f^{-1}[B]] = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subseteq E$, $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}[f[A]] = A$.

Exercice 25. Pour chacune des relations définies ci dessous, determiner si ce sont des relations d'ordre ou d'équivalence :

a) Pour m et n deux entiers relatifs, $n \equiv m$ si et seulement si 4 divise $m - n$.

b) Pour f et g deux fonctions réelles, $f \mathcal{R} g$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x)$.

c) Pour f et g deux fonctions réelles, $f \sim g$ si et seulement si il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f = h \cdot g$ et que h ait limite 1 en $+\infty$.

d) Soit E un ensemble. On définit, pour A et B deux parties de E, $A \prec B$ si et seulement si il existe une fonction injective de A dans B.

e) Soit E un ensemble. On définit, pour A et B deux parties de E, $A \bowtie B$ si et seulement $A \cap B = \emptyset$.

f) Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit, pour x et y dans E, $x \smile y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

g) (*) Soient E un ensemble et $\ll$ une relation réflexive et transitive sur ces éléments. Soit $X = \{\{y \in E, x \ll y \text{ et } y \ll x\}, x \in E\}$. On définit pour A et B deux éléments de X, $A \lll B$ si et seulement il existe a dans A et b dans B tels que $a \ll b$.

Exercice 26. Indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de parties de E. Soit A une partie de E : $A \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A} = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E.

Pour tout $A \subseteq E$ on définie une fonction *indicatrice de* A sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$, notée $\mathbf{1}_A$, définie pour $\forall x \in E$ par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :
   (a) Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\} \subseteq E$ et $B = \{c, d\} \subseteq E$. Expliciter les fonctions $\mathbf{1}_E$, $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{\overline{A}}$, $\mathbf{1}_B$ ainsi que $\mathbf{1}_{A\cap B}$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}$.
   (b) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$ sa fonction indicatrice sur $\mathbb{R}$. Décrire les ensembles $\mathbf{1}_A[A]$, $\mathbf{1}_A[\overline{A}]$, $\mathbf{1}_A[\mathbb{R}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{1\}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{0\}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{0; 1\}]$.
2. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :
   (a) Montrer que $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A$.
   (b) Inclusion : $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$. (Cela veut dire que pour $\forall x \in E$, on a $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$.)
   Égalité : $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
   (c) Opérations ensemblistes :
   $$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A; \quad \mathbf{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B; \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$
   (d) Lien avec le cardinal : si E est de cardinal fini, $|A| = \sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x)$.
3. <u>Formule du crible.</u> Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que
   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
4. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

(a) Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?

(b) Soit

$$\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F} : \; A \mapsto \mathbf{1}_A$$

une application qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.

(c) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et calculer son cardinal.

5. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Calculer $\displaystyle\sum_{A,B\subseteq E} |A \cap B|$, $\displaystyle\sum_{A,B\subseteq E} |A \cup B|$.