Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2023–2024

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 4

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1.

1. **Vrai-faux.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
   2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair).
   3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
   4. $\forall x \in \mathbb{R}, ((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$.
   5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$. Donc pour tout réel x, $x - 1 < 0$.
2. **Analyse-synthèse.**
   1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
   2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 2.

1. Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   (a) $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.
   (b) P et (non(Q) ou R).
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Longrightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \Big((x \leq 0) \text{ et } \big((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\big)\Big)$.

Exercice 3.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))\,.$$
2. Montrer que, pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 4.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)\,.$$

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow ((x-1)(10-x^2) \geq 0)$.
3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

équivaut à

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que sont équivalents :
   (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;
   (b) $x_0 - y_0 = 0$;
   (c) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0\, t + y_0\,(-t) \leq 0$.

Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et non}(Q))\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0\big) \Rightarrow \big(-x^4 + x^3 - 9 < 0\big)$.
3. Soit $\mathcal{P} = \{2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1;\ k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R)\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\big) \Rightarrow \big((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1)\big)$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } \ ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3))\,.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Exercice 8. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$. 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

4. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\forall x \in I,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$.

5. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$.

6. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ \left(x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$. 7. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2,\ \left(x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 9. 1. Écrire l'énoncé qui traduit "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante".

2. Cet énoncé est-il équivalent à "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante" ?

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [[1,n]]$, on a $x_i = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x$.

Montrer qu'il existe $i \in [[1,n]]$, tel que $x_i \leq \dfrac{x}{n}$.

Exercice 11. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. 2. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$. 3. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$.
4. $\ldots\ x \in \mathbb{N},\ x \leq \pi$. 5. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$. 6. $\ldots\ x \in \emptyset,\ 2 = 3$.

Exercice 12. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. 2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. 3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y > x^2$. 5. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$. 6. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$.

Exercice 13. On note $A = [0,1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A, \forall y \in A, (x+y) \in A$. 2. $\forall x \in A, \exists y \in A, (x+y) \in A$. 3. $\exists x \in A, \forall y \in A, (x+y) \in A$.

Exercice 14. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}_+,\ \forall z \in \mathbb{R}_+,\ ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.
L'écrire en français puis décider de sa véracité.

Exercice 15. Donner une preuve directe ainsi qu'une preuve par récurrence des faits suivants :

1. La somme $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin \alpha|$. *Indication : utiliser la formule* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Exercice 17.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: si $n = 0$ alors $u_n = 1$, si $n > 0$ alors $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.
2. Montrer que tout nombre naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

Exercice 18. Trouver une faute dans le raisonnement :

> On “montre” par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec $n = 0$. Hérédité : les deux suites sont solution de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Exercice 19.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, puis montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis montrer que $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2,\ x^y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 20.

1. Soient x et y deux réels distincts de 1. Montrer que si $x \neq y$, alors $\dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{y-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.