Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2023-2024

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 2

Récurrence, sommes et produits

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 4u_n + 9.$$

1. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \lambda)_{n\in N}$ soit une suite géometrique.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Calculer le terme général des suites définies par récurrences suivantes :

1. $u_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^3$;
2. $v_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n^3$.

Exercice 5. Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 6. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + ... + 3^{15}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... + \frac{10}{1024}$
3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n}$
4. $2 - 4 + 6 - 8 + ... + 50$

Exercice 7. Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\forall n \geq 4$, $2^n \leq n!$ (avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 8. (Formule du binôme de Newton)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!] = [0, n] \cap \mathbb{N}$, on note (avec la convention $0! = 1$) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Calculer $\binom{0}{0}$, $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Formule du binôme de Newton.

   (a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

   (b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

   (c) Montrer la formule du binôme de Newton : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\ .$$

3. Mise en pratique.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.

   (b) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$:

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

   (c) En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. (Factorisation de $a^n - b^n$)
Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}\ .$$

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$.
3. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes. On pourra admettre les résultats de l'exercice 7.

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} k$
2. $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} (3+5i)$
3. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$
4. $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$
7. Pour $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 5$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k^2+2k+1)$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2^k+k^2+1)$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

Exercice 12. Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 3$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
4. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^k$
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$

Exercice 13. (Sommes et produits télescopiques)

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

   (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

   (c) En déduire la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{x}{k}).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(k)$ comme un coefficient binomial.

Exercice 15. **(Sommes doubles)**

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\Big)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$