Université Claude Bernard Lyon 1
Cursus prépa - Première année Semestre d'automne 2023-2024

Mathématiques - DS n°4 CUPGE

Documents et calculettes interdits
Corrigé

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation complexe $z^2 - (3+i)z + 8 - i = 0$.
2. (a) Déterminer géométriquement la similitude directe du plan complexe $z \mapsto 2(1+i)z - 7 - 4i$, c'est-à-dire l'exprimer comme translation, ou rotation/homothétie dont on explicitera les paramètres.
   (b) Donner une expression explicite comme similitude directe de la rotation ρ du plan complexe de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Solution.

1. On calcule le discriminant $\Delta = (3+i)^2 - 4(8-i) = 9 - 1 + 6i - 32 + 4i = -24 + 10i$. On pose $\delta = (a+ib)$ avec $\delta^2 = \Delta$. Alors

$$a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = -24, \qquad 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) = 10, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{2^2(12^2 + 5^5)} = 2\sqrt{169} = 2 \cdot 13 = 26.$$

Ceci donne $2a^2 = -24 + 26 = 2$ et $a = \pm 1$. Donc $b = 10/2a = \pm 5$, et $\delta = \pm(1+5i)$. On a bien $\delta^2 = \Delta$. Enfin, on obtient comme solutions

$$z_{1/2} = \frac{3 + i \pm (1+5i)}{2} \in \{2+3i, 1-2i\}.$$

2. On calcule le point fixe $z = 2(1+i)z - 7 - 4i$, d'où $(1+2i)z = 7 + 4i$ et

$$z = \frac{7+4i}{1+2i} = \frac{(7+4i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{15-10i}{5} = 3 - 2i.$$

De plus, $\mathrm{Arg}(2(1+i)) = \frac{\pi}{4}$ et $|2(1+i)| = 2\sqrt{2}$. Il s'agit donc de l'homothétie-rotation de rapport $2\sqrt{2}$ et angle $\frac{\pi}{4}$ de centre $3 - 2i$.

3. C'est la similitude directe

$$\begin{aligned} z \mapsto & e^{i\pi/4}(z - (1+i)) + (1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z - (1+i)) + (1+i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + (1+i)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + (1 + i - \frac{\sqrt{2}}{2}2i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + 1 + (1-\sqrt{2})i. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation diophantienne $14x \equiv 6 \mod 34$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.
3. Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors $(ab) \wedge n = b \wedge n$.

Solution.

1. $14x \equiv 6 \mod 34$ ss'il y a $y \in \mathbb{Z}$ avec $14x - 6 = 34y$, soit $7x - 17y = 3$. On a $\mathrm{pgcd}(7, 17) = 1$, il y a donc des solutions. Pour $x = 2$ et $y = 1$ on a $7 \cdot 2 - 17 \cdot 1 = -3$. On a ainsi une solution particulière $x_0 = -2$ (et $y_0 = -1$). Si (x, y) est une solution générale, on a $7(x - x_0) - 17(y - y_0) = 0$. Puisque $\mathrm{pgcd}(7, 17) = 1$ le lemme de Gauss implique $17 \mid x - x_0$, et il y a $k \in \mathbb{Z}$ avec $x = x_0 + 17k$. Réciproquement, $14(x_0 + 17k) \equiv 14x_0 \mod 34$. Les solutions sont donc $x \in -2 + 17\mathbb{Z}$.

2. Soit $a = \pm \prod_i p_i^{\alpha_i}$ et $b = \pm \prod_i p_i^{\beta_i}$ pour des nombres premiers distincts p_i et des exposants $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$. Alors $a^2 = \prod_i p_i^{2\alpha_i}$ et $b^2 = \prod_i p_i^{2\beta_i}$. On a $a^2 \mid b^2$ ssi $2\alpha_i \leq 2\beta_i$ pour tout i. Cela implique $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout i, et donc $a \mid b$.

   Alternative. Soit $\mathrm{pgcd}(a,b) = d$, et $a = da'$, $b = db'$. Alors $\mathrm{pgcd}(a',b') = 1$. D'après un théorème du cours $\mathrm{pgcd}(a'^2, b'^2) = 1$. Or, $a'^2 d^2 = a^2 \mid b^2 = b'^2 d^2$, et donc $a'^2 \mid b'^2$. Puisque $\mathrm{pgcd}(a'^2, b'^2) = 1$, ceci implique $a' = \pm 1$, et $a = \pm d \mid b$.

3. C'est faux. On prend $a = n = 2$, $b = 1$. Alors $ab \wedge n = 2$ et $b \wedge n = 1$.

   Par contre, si $a \wedge n = 1$ alors $ab \wedge n = b \wedge n$: Si $k \mid b$ et $k \mid n$, alors $k \mid ab$, so $b \wedge n \mid ab \wedge n$. Réciproquement, si $k \mid ab \wedge n$ alors $k \mid ab$ et $k \mid n$. Puisque $a \wedge n = 1$ ce dernier implique $k \mid b$. Ainsi $b \wedge n \mid ab \wedge n$, d'où $ab \wedge n = b \wedge n$.

<u>**Exercice 3 :**</u> On cherche à montrer qu'une fonction continue périodique non constante sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_n$ une suite strictement décroissante de périodes positives de f.

1. Montrer que $(u_n)_n$ à une limite ℓ.
2. Montrer que ℓ est aussi une période de f.
3. En déduire que $v_n = u_n - \ell$ donne une suite strictement décroissante de périodes de f de limite 0.
4. Montrer que pour tout réel r et tout $\epsilon > 0$ il y a $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|r - v_k n| < \epsilon$.
5. En déduire que f est constante.
6. Conclure.

Solution.

1. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers une limite ℓ.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + u_n) = f(x)$, et donc par continuité de f on a
$$f(x+\ell) = f(x + \lim_{n\to\infty} u_n) = f(\lim_{n\to\infty}(x+u_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x+u_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$
   Ainsi ℓ est aussi une période de f.
3. Puisque $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante de limite ℓ, la suite $(v_n)_n = (u_n - \ell)_n$ est aussi strictement décroissante de limite $\ell - \ell = 0$. Comme u_n et ℓ sont des périodes de f, les $v_n = u_n - \ell$ aussi.
4. Soit $\epsilon > 0$ et $r \in \mathbb{R}$. Puisque $(v_n)_n$ converge vers 0 on trouve $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < v_k < \epsilon$. Soit $n = E(r/v_k)$. Alors $r/v_k - 1 < n \leq r/v_k$, et donc $r - v_k < v_k n \leq r$. Ainsi $|r - v_k n| \leq v_k < \epsilon$.
5. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ comme dans la partie 4. On pose $x_n = v_k n$. Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = r$, et donc par continuité de f
$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(v_k n) = \lim_{n\to\infty} f(0) = f(0).$$
   Ainsi f est constante.
6. Ainsi une fonction non-constante ne peut pas avoir une suite strictement décroissante de périodes. Il y a donc une plus petite période positive.

<u>**Exercice 4 :**</u>

1. (a) Donner la définition qu'une fonction réelle est *lipschitzienne.*
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
2. (a) Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^\times$?
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution.

1. (a) Une fonction réelle est lipschitzienne s'il y a une constante λ tel que pour tout $x, y \in \mathrm{dom}\,(f)$ on a $f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$.

(b) La fonction dérivée f' est continue sur l'intervalle fermée $[a,b]$, et la fonction $|f'|$ l'est aussi. D'après le théorème du maximum $|f'|$ y atteint un maximum λ. D'après l'inégalité des accroissements finis on a pour tout $x, y \in \operatorname{dom}(f)$ que

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

Donc f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

2. (a) Sur $]-\infty, 0[$ la fonction dérivée de $\ln(-x)$ est $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Sur $]0, \infty[$ la fonction dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$. Donc la fonction dérivée de $\ln|x|$ sur $\mathbb{R}^\times$ est $\frac{1}{x}$.

(b) Le domaine maximal de $f(x) = x^2 \ln|x|$ est $\mathbb{R}^\times$. On calcule

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln|x| = \lim_{x\to 0} |x|^2 \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$$

d'après les croissances comparées. Ainsi f a une prolongation par continuité $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$, et $\bar{f}(0) = 0$.
La fonction dérivée est $f'(x) = 2x \ln|x| + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln|x| + x$. On calcule

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x \ln|x| + x = \lim_{x\to 0} 2x \ln|x| + \lim_{x\to 0} x = 0 + 0 = 0$$

d'après les croissances comparées. D'après le théorème de la prolongation dérivable, $\bar{f}$ défini ci-dessus est dérivable sur $\mathbb{R}$ entier, avec $\bar{f}'(0) =$.