Mathématiques - DS n°4 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation complexe $z^2 - (3+i)z + 8 - i = 0$.
2. (a) Déterminer géométriquement la similitude directe du plan complexe $z \mapsto 2(1+i)z - 7 - 4i$, c'est-à-dire l'exprimer comme translation, ou rotation/homothétie dont on explicitera les paramètres.
   (b) Donner une expression explicite comme similitude directe de la rotation ρ du plan complexe de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation diophantienne $14x \equiv 6 \mod 34$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.
3. Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors $(ab) \wedge n = b \wedge n$.

Exercice 3 : On cherche à montrer qu'une fonction continue périodique non constante sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_n$ une suite strictement décroissante de périodes positives de f.

1. Montrer que $(u_n)_n$ à une limite ℓ.
2. Montrer que ℓ est aussi une période de f.
3. En déduire que $v_n = u_n - \ell$ donne une suite strictement décroissante de périodes de f de limite 0.
4. Montrer que pour tout réel r et tout $\epsilon > 0$ il y a $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|r - v_k n| < \epsilon$.
5. En déduire que f est constante.
6. Conclure.

Exercice 4 :

1. (a) Donner la définition qu'une fonction réelle est *lipschitzienne*.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
2. (a) Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^\times$?
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.