Devoir surveillé N°4

Durée : 1h30

Exercice 1 (6 points). 1. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 3 - 4i$.

2. Soit $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par
$$s(z) = \frac{3-4i}{5}\bar{z},$$
qui traduit une transformation géométrique S du plan $\mathcal{P}$. Trouver les points fixes et identifier la transformation géométrique correspondante.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. On pose $S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(k\theta)$. Montrer que
$$S_n(\theta) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin((n+1)\theta) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1},$$
et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta)$.

Exercice 2 (5 points). a) Déterminer les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $3x \equiv 1 \pmod 5$.
b) En déduire les solutions $x \in \mathbb{Z}$ du système $3x \equiv 1 \pmod 5$ et $x \equiv 5 \pmod{13}$.

Exercice 3 (5 points). a) Calculer $\text{pgcd}(198, 75)$ et trouver entiers u et v tels que
$$\text{pgcd}(198, 75) = 198u + 75v.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $198x + 75y = 0$;
2. $198x + 75y = 3$;
3. $198x + 75y = 5$.

Exercice 4 (8 points). On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{\text{ch}(x+1)} - \sqrt{\text{ch}(x)}.$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(0) = -f(-1)$ et que ces réels ne sont pas nuls. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine sur l'intervalle $]-1, 0[$.
3. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{\text{ch}(x)}$.
   (a) Quelle relation simple relie f et g ?
   (b) Rappeler le théorème de dérivée composée. Calculer la dérivée g'.
4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\text{ch}(x))^{1/x}$ pour $x \neq 0$.

(a) Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x}.$$

En déduire le prolongement par continuité en 0 de f.

(b) Montrer qu'on obtient une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.