Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'Automne 2023-2024

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 — 29 Novembre 2023

Correction du Devoir surveillé N°4

Durée : 1h30

Exercice 1 (6 points)**.**

1. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 3 - 4i$.
2. Soit $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par
$$s(z) = \frac{3-4i}{5}\bar{z},$$
qui traduit une transformation géométrique S du plan $\mathcal{P}$. Trouver les points fixes et identifier la transformation géométrique correspondante.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. On pose $S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(k\theta)$. Montrer que
$$S_n(\theta) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin((n+1)\theta) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1},$$
et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta)$.

Correction.

1. On cherche les nombres complexes $z = a+bi$ tels que $z^2 = 3-4i$. Comme $|z^2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, on a
$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 3 \\ 2ab & = -4 \\ a^2 + b^2 & = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 & = 4 \\ ab & = -2 \\ b^2 & = 1 \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in \{(2,-1),\ (-2,1)\}.$$
Donc l'ensemble des solutions est $\{2-i, -2+i\}$.
2. Soit $\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-i)$. Par 1., δ est une racine carrée de $\frac{3-4i}{5}$. Comme le module de δ est 1, on a $\delta = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $s(z) = e^{i2\theta}\bar{z}$, quelque soit $z \in \mathbb{C}$. Donc $z \in \mathbb{C}$ est un point fixe de s si et seulement si $e^{-i\theta}z \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'ensemble des points fixes est la droite (OA), où A est le point d'affixe δ, et S est la symétrie par rapport à la droite (OA). (**N.B.** : En prenant la racine carrée $-\delta$, on obtient la même droite (OA).)
3. On pose $T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} t^{(k-1)}e^{ik\theta}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$, on a $|te^{i\theta}| < 1$, donc
$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n}(te^{i\theta})^{k-1} \\ &= \frac{e^{i\theta}(1-(te^{i\theta})^n)}{1-te^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta}(1-t^ne^{in\theta})(1-te^{-i\theta})}{(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})} \\ &= \frac{e^{i\theta} - t^ne^{i(n+1)\theta} + t^{n+1}e^{in\theta} - t}{1-2t\cos(\theta)+t^2}. \end{aligned}$$
Par conséquent,
$$S_n(\theta) = \mathrm{Im}(T_n(\theta)) = \frac{\sin(\theta) - t^n\sin((n+1)\theta) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}.$$
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|\sin((n+1)\theta)| \leq 1$ et $|\sin(n\theta)| \leq 1$, donc, quand $n \to +\infty$,
$$t^n \to 0 \Longrightarrow t^n\sin((n+1)\theta) \to 0 \quad \text{et} \quad t^{n+1}\sin(n\theta) \to 0,$$

et on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}.$$

Exercice 2 (5 points)**.** a) Déterminer les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $3x \equiv 1 \pmod 5$.

b) En déduire les solutions $x \in \mathbb{Z}$ du système $3x \equiv 1 \pmod 5$ et $x \equiv 5 \pmod{13}$.

Correction. a) L'équation $3x \equiv 1 \pmod 5$ équivaut à $3x - 5y = 1$ pour certain $y \in \mathbb{Z}$. Comme $3 \times 2 - 5 \times 1 = 1$, en soustrayant on obtient $3(x-2) - 5(y-1) = 0 \iff 5|3(x-2) \iff 5|(x-2)$ car 5 et 3 sont premiers entre eux, donc $x \equiv 2 \pmod 5$.

b) D'après a), le système équivaut à $x \equiv 2 \pmod 5$ et $x \equiv 5 \pmod{13}$. Comme 5 et 13 sont premiers entre eux et $13 \times 2 - 5 \times 5 = 1$, d'après un théorème du cours, la solution générale est $x \equiv 2 \times 13 \times 2 - 5 \times 5 \times 5 \pmod{5 \times 13}$, c'est-à-dire

$$x \equiv 57 \pmod{65}.$$

Exercice 3 (5 points)**.** a) Calculer $\text{pgcd}(198, 75)$ et trouver entiers u et v tels que

$$\text{pgcd}(198, 75) = 198u + 75v.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $198x + 75y = 0$;
2. $198x + 75y = 3$;
3. $198x + 75y = 5$.

Correction. a) On effectue les divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned}
198 &= 75 \times 2 + 48 \\
75 &= 48 \times 1 + 27 \\
48 &= 27 \times 1 + 21 \\
27 &= 21 \times 1 + 6 \\
21 &= 6 \times 3 + 3 \\
6 &= 3 \times 2 \Longrightarrow \text{pgcd}(198, 75) = 3,
\end{aligned}$$

et en déduit

$$\begin{aligned}
3 &= 21 - (27 - 21) \times 3 \\
&= -27 \times 3 + (48 - 27) \times 4 \\
&= -(75 - 48) \times 7 + 48 \times 4 \\
&= (198 - 75 \times 2) \times 11 - 75 \times 7 \Longrightarrow 198 \times 11 + 75 \times (-29) = 3.
\end{aligned}$$

b) 1. On cherche $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $198x + 75y = 0 \iff 66x + 25y = 0 \Longrightarrow 25|x$ car $\text{pgcd}(66, 25) = 1$. En substituant $x = 25k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ dans la dernière équation, on tire $y = -66k$. Donc la solution générale est $x = 25k, y = -66k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, d'après a), on a $198x + 75y = 3 \iff 198(x - 11) + 75(y + 29) = 0$, on déduit de 1. que

$$x = 11 + 25k,\ y = -29 - 66k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

3. On a $3 = \text{pgcd}(198, 75)$ et 3 ne divise pas 5, donc l'équation $198x + 75y = 5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 4 (8 points)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(x+1)} - \sqrt{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(0) = -f(-1)$ et que ces réels ne sont pas nuls. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine sur l'intervalle $]-1, 0[$.
3. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(x)}$.
   (a) Quelle relation simple relie f et g ?
   (b) Rappeler le théorème de dérivée composée. Calculer la dérivée g'.
4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\operatorname{ch}(x))^{1/x}$ pour $x \neq 0$.
   (a) Calculer
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x}.$$
   En déduire le prolongement par continuité en 0 de f.
   (b) Montrer qu'on obtient une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \geq 1 > 0$, donc $\operatorname{ch}(x+1) \geq 1 > 0$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est définie, et continue pour $t \geq 0$, donc f est définie et continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(0) = \sqrt{\operatorname{ch}(1)} - \sqrt{\operatorname{ch}(0)}$ et $f(-1) = \sqrt{\operatorname{ch}(0)} - \sqrt{\operatorname{ch}(-1)} = \sqrt{\operatorname{ch}(0)} - \sqrt{\operatorname{ch}(1)} = -f(0)$. D'autre part, $f(0) = \sqrt{\operatorname{ch}(1)} - \sqrt{\operatorname{ch}(0)} = \sqrt{(e+e^{-1})/2} - 1 > 0$ car $e + e^{-1} - 2 = (\sqrt{e} - \sqrt{e^{-1}})^2 > 0$ (ou on admet que $e > 2$). Donc $f(-1) < 0$. Comme f est continue sur $]-1, 0[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = 0$.
3. (a) $f(x) = g(x+1) - g(x)$.
   (b) Soit $g = h \circ u$ alors $g' = h' \circ u \times u'$, on l'applique à $h : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u = \operatorname{ch}$,
   $$g'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2\sqrt{\operatorname{ch}(x)}}.$$
4. On considère la fonction $f(x) = (\operatorname{ch}(x))^{1/x} = e^{\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x}} > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   (a) Comme
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x} = (\ln(\operatorname{ch}(x))'(0) = \frac{\operatorname{sh}(0)}{\operatorname{ch}(0)} = 0,$$
   on a $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$. On définit $f(0) = 1$ par le prolongement par continuité en 0.
   (b) Pour $x \neq 0$, on a
   $$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2} h(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{h(x) = x\tanh(x) - \ln ch(x)}.$$
   D'autre part, $h(0) = 0$ et $h'(x) = x(1 - \tanh^2 x)$ est du signe de x car $|\tanh(x)| = |\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour tout $x \neq 0$, $h(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$, ce qui implique que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Quand $x \to +\infty$,
   $$\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} \ln \frac{1+e^{-2x}}{2} \to 1,$$
   donc $f(x) \to e$. Enfin, on a $f(-x) = 1/f(x)$ avec $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1/e$. Le prolongement de f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1/e, e[$.