
Mathématiques - DS n°3 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Corrigé

Exercice 1 :

1. Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$.
   (a) Calculer $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.
   (b) Donner le cardinal de l'ensemble $\{0,1,2\}^X$.
   (c) Donner le nombre de couples (X,Y) avec $X \subseteq Y \subseteq E$.
   (d) Donner le nombre de couples (X,Y) avec $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ et $X \cap Y = \emptyset$.
2. À une fête, n personnes sont invitées. Elles peuvent se rencontrer ou non. Montrez qu'au moins 2 invités ont rencontré le même nombre d'invités.

Solution.

1. (a)

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{X\in\mathcal{P}(E),\,|X|=i} i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!\, i}{(i!\,(n-i)!} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} n\,\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n\, 2^{n-1}.$$

   (b)

$$\operatorname{card}\big(\{0,1,2\}^X\big) = \operatorname{card}(\{0,1,2\})^{\operatorname{card}(X)} = 3^{\operatorname{card}(X)}.$$

   (c) Soit $X \subseteq Y \subseteq E$. On pose

$$f_{X,Y} : E \to \{0,1,2\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ 1 & \text{si } x \in Y \setminus X \\ 2 & \text{si } x \in E \setminus Y. \end{cases}$$

   Alors l'application $g : \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\} \to \{0,1,2\}^E$ donné par $(X,Y) \mapsto f_{X,Y}$ admet comme application réciproque

$$h : \{0,1,2\}^E \to \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\}$$
$$f \mapsto (\{x \in E : f(x) = 0\}, \{x \in E : f(x) \le 1\}).$$

   Donc g est bijective, et $\operatorname{card}(\{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\}) = 3^n$.

   (d) On considère l'application

$$\{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\} \to \{(U,V) \in \mathcal{P}(E)^2 : U \cap V = \emptyset\}, \qquad (X,Y) \mapsto (X, Y \setminus X).$$

   Elle admet une fonction réciproque

$$\{(U,V) \in \mathcal{P}(E)^2 : U \cap V = \emptyset\} \to \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\}, \qquad (U;V) \mapsto (U, U \cup V).$$

   Donc $\operatorname{card}(\{(U,V) \in \mathcal{P}(E)^2 : U \cap V = \emptyset\}) = \operatorname{card}(\{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 : X \subseteq Y\}) = 3^n$.

2. Une personne peut rencontrer entre 0 et $n-1$ invités. Cependant, si une personne rencontre $n-1$ invités, elle rencontre tout le monde et personne ne rencontre 0 invités. Il y a n personnes et $n-1$ possibilités. On a $n > n-1$; d'après le principe des tiroirs, il y a au moins deux personnes qui rencontrent le même nombre d'invités.

Exercice 2 :

1. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie $A \subseteq X$ on a $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.
2. Soit E un ensemble et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que pour tout $X, Y \in \mathcal{F}$ il y a $Z \in \mathcal{F}$ avec $Z \subseteq X \cap Y$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $A \sim_{\mathcal{F}} B$ ssi $\exists X \in \mathcal{F}$, $A \cap X = B \cap X$.
   (a) Montrer que $\sim_{\mathcal{F}}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner les classes de $\emptyset$ et de E.
   (c) En déduire que si E contient au moins deux éléments, il y a une relation d'équivalence sur E qui n'est pas de la forme $\sim_{\mathcal{F}}$.
   (d) Décrire $\sim_{\mathcal{F}}$ si $\mathcal{F}$ possède 2 éléments disjoints.
   (e) En déduire que l'application $\mathcal{F} \mapsto \sim_{\mathcal{F}}$ n'est pas injective.

Solution.

1. Soit f bijective, et $A \subseteq X$. Soit $y \in Y \setminus f[A]$. Puisque f est surjective, il y a $x \in X$ avec $f(x) = y$. Si $x \in A$ alors $f(x) \in f[A]$, une contradiction. Donc $x \in X \setminus A$, et $f[X \setminus A] \supseteq Y \setminus f[A]$. Réciproquement, soit $x \in X \setminus A$. Alors $f(x) \in Y$. Si $f(x) \in f[A]$, il y a $a \in A$ avec $f(a) = f(x)$; par injectivité de f on a $x = a \in A$, une contradiction. Donc $f[X \setminus A] \subseteq Y \setminus f[A]$ et on a égalité.
   On suppose maintenant $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$ pour tout $A \subseteq X$. Pour $A = \emptyset$ on a $f[\emptyset] = \emptyset$ et $f[X] = Y$. Ainsi f est surjective. Si $f(x) = f(x') = y$, on pose $A = x'$. Alors
   $$y \notin Y \setminus f(x') = Y \setminus f[A] = f([X \setminus A].$$
   Puisque $f(x) = y$, on a $x \notin X \setminus A = X \setminus \{x'\}$. Puisque $x \in X$ on a $x = x'$, et f est injective.
2. Il faut supposer que $\mathcal{F}$ est non-vide.
   (a) On a $A \cap X = A \cap X$ pour tout $x \in \mathcal{F}$, donc $A \sim_{\mathcal{F}} A$ pour tout $A \subseteq X$ (reflexivité).
   Si $A \sim_{\mathcal{F}} B$ soit $X \in \mathcal{F}$ tel que $A \cap X = B \cap X$. Alors $B \cap X = A \cap X$, et $B \sim_{\mathcal{F}} A$ (symétrie).
   Si $A \sim_{\mathcal{F}} B$ et $B \sim_{\mathcal{F}} C$ soient $X, Y \in \mathcal{F}$ tel que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap y = C \cap Y$. Soit $Z \in \mathcal{F}$ avec $Z \subseteq X \cap Y$. Alors $A \cap Z = B \cap Z = C \cap Z$, et $A \sim_{\mathcal{F}} C$ (transitivité).
   Ainsi $\sim_{\mathcal{F}}$ est une relation d'équivalence.
   (b) $[\emptyset] = \{A \subseteq E : \exists X \in \mathcal{F}\ X \cap A = \emptyset\}$ et $[E] = \{A \subseteq E : \exists X \in \mathcal{F}\ X \subseteq A\}$. Dans les deux cas, le $X \in \mathcal{F}$ témoigne de la relation $\sim_{\mathcal{F}}$, et un témoin de la reation a nécessairement la propriété voulue.
   (c) Si $\emptyset \sim_{\mathcal{F}} E$, alors $\emptyset \in \mathcal{F}$. Mais si $\emptyset \in \mathcal{F}$, on a $A \sim_{\mathcal{F}} B$ pour tout $A, B \subseteq E$ (témoigné par $\emptyset$). Donc la relation avec deux classes $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ n'est pas de la forme $\sim_{\mathcal{F}}$.
   (d) Si $\mathcal{F}$ contient deux éléments disjoints X et Y, alors il contient un $Z \subseteq X \cap Y = \emptyset$. Ainsi $\emptyset = Z \in \mathcal{F}$, et $\sim_{\mathcal{F}}$ est la relation totale.
   (e) $\sim_{\{\emptyset\}}$ et $\sim_{\mathcal{P}}(E)$ sont tous les deux la relation totale, et $\{\emptyset\} \neq \mathcal{P}(E)$ (sauf pour $E = \emptyset$)).

<u>**Exercice 3 :**</u> Une suite réelle $(u_n)_n$ est *une suite de Cauchy* si $\lim_{n\to\infty} \sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq n\} = 0$.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_n$ est bornée.
   (b) En déduire que $(u_n)_n$ a une suite extraite convergente. Soit ℓ sa limite.
   (c) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.
2. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

Remarque : On appelle un corps ordonné *complet* si toute suite de Cauchy converge. Dans cet exercice on montre que $\mathbb{R}$ est complet. Par contre, les rationnels $\mathbb{Q}$ ne sont pas complets.

Solution.

1. (a) Puisque $\lim_{n\to\infty} \sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq n\} = 0$, il y a N tel que $\sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq N\} \leq 1$. Alors $|u_i - u_N| \leq 1$ pour tout $i \geq N$, et $(u_n)_n$ est bornée.
   (b) D'après le théorème de Weierstrass, une suite bornée a une suite extaite convergente.

(c) Soit $\epsilon > 0$, et N entier tel que $\sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq n\} \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. Soit $k \geq N$ tel que u_k est dans la suite extraite et $|u_k - \ell| \leq \epsilon/2$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_k| + |u_k - \ell| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers un réel ℓ. Soit $\epsilon > 0$, et N entier tel que $|u_n - \ell| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. Alors

$$|u_i - u_j| \leq |u_i - \ell| + |\ell - u_j| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} \sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq n\} = 0$, et $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 4 : Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par

$$u_0 = x, \quad v_0 = y, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et déduire qu'ils ont une limite commune, qu'on appellera $M(x, y)$ (moyenne arithmético-géométrique).
2. Montrez que M est symétrique, et que $M(tx, ty) = tM(x, y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (on dit que M est homogène de degré 1).
3. Montrer que $\sqrt{xy} \leq M(x, y) \leq \frac{x+y}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

Solution.

1. Notons que

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{\sqrt{u_n}^2 - 2\sqrt{u_n v_n} + \sqrt{v_n}^2}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0;$$

Donc $u_{n+1} \geq v_{n+1}$ pour tout n.
Supposons $u_n \geq v_n$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n \qquad \textit{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
Enfin,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})}{2\,(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(u_n - v_n)}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})\,2} \leq \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ et les deux suites sont adjacentes.
D'après le théorème de ssuites adjacentes, elles ont une limite commune $\ell = M(x, y)$.

2. Si on commence avec $u'_0 = y$ et $v'_0 = x$, on a $u'_1 = u_1$ et $v'_1 = v_1$. Ainsi $(u_n)_{n\geq 1} = (u'_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1} = (v'_n)_{n\geq 1}$, d'où $M(x, y) = M(y, x)$.
De même, puisque $\frac{tu_n + tv_n}{2} = t\frac{u_n + v_n}{2} = tu_{n+1}$ et $\sqrt{tu_n tv_n} = t\sqrt{u_n v_n} = tv_{n+1}$, on voit par récurrence que si on commence avec $u''_0 = tx$ et $v''_0 = ty$ on a $u''_n = tu_n$ et $v''_n = tv_n$, d'où $M(tx, ty) = tM(x, y)$.

3. $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, donc $u_1 = \frac{x+y}{2} \geq \ell = M(x, y)$. Et $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante, d'où $v_1 = \sqrt{xy} \leq \ell = M(x, y)$.
Le calcul en 1. montre que les croissances sont strictes sauf si $x = y$. Ainsi les égalités sont strictes, sauf si $x = y$. Si $x = y$, les suites sont constantes et égales, et on a égalité.