Mathématiques - DS n°3 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 :

1. Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$.
   (a) Calculer $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.
   (b) Donner le cardinal de l'ensemble $\{0, 1, 2\}^X$.
   (c) Donner le nombre de couples (X, Y) avec $X \subseteq Y \subseteq E$.
   (d) Donner le nombre de couples (X, Y) avec $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ et $X \cap Y = \emptyset$.
2. À une fête, n personnes sont invitées. Elles peuvent se rencontrer ou non. Montrez qu'au moins 2 invités ont rencontré le même nombre d'invités.

Exercice 2 :

1. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie $A \subseteq X$ on a $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.
2. Soit E un ensemble et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que pour tout $X, Y \in \mathcal{F}$ il y a $Z \in \mathcal{F}$ avec $Z \subseteq X \cap Y$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $A \sim_{\mathcal{F}} B$ ssi $\exists\, X \in \mathcal{F}$, $A \cap X = B \cap X$.
   (a) Montrer que $\sim_{\mathcal{F}}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner les classes de $\emptyset$ et de E.
   (c) En déduire que si E contient au moins deux éléments, il y a une relation d'équivalence sur E qui n'est pas de la forme $\sim_{\mathcal{F}}$.
   (d) Décrire $\sim_{\mathcal{F}}$ si $\mathcal{F}$ possède 2 éléments disjoints.
   (e) En déduire que l'application $\mathcal{F} \mapsto \sim_{\mathcal{F}}$ n'est pas injective.

Exercice 3 : Une suite réelle $(u_n)_n$ est *une suite de Cauchy* si $\lim_{n\to\infty} \sup\{|u_i - u_j| : i, j \geq n\} = 0$.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_n$ est bornée.
   (b) En déduire que $(u_n)_n$ a une suite extraite convergente. Soit ℓ sa limite.
   (c) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.
2. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

Remarque : On appelle un corps ordonné *complet* si toute suite de Cauchy converge. Dans cet exercice on montre que $\mathbb{R}$ est complet. Par contre, les rationnels $\mathbb{Q}$ ne sont pas complets.

Exercice 4 : Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par

$$u_0 = x, \quad v_0 = y, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et déduire qu'ils ont une limite commune, qu'on appellera $M(x, y)$ (moyenne arithmético-géométrique).
2. Montrez que M est symétrique, et que $M(tx, ty) = tM(x, y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (on dit que M est homogène de degré 1).
3. Montrer que $\sqrt{xy} \leq M(x, y) \leq \frac{x+y}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = y$.