

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative. Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (8 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}_+^* . On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe et qu'elle est strictement inférieure à 1.

1) Montrez qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$ on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha.$$

2) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{N+k} < \alpha^k u_N$.

3) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

a) Montrez que cette suite est croissante.

b) Montrez qu'elle est majorée (découpez la somme $\sum_{k=0}^n$ en $\sum_{k=0}^N + \sum_{k=N+1}^n$).

c) Montrez qu'elle est convergente.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que la suite définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

est convergente.

Corrigé

1) (2 pts) Soit $l < 1$ la limite donnée dans l'énoncé, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

Comme $l < 1$ il est facile de choisir ε tel que $l + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = (1 - l)/3$). D'où le résultat demandé avec $\alpha = l + \varepsilon$.

2) (2 pts) On a donc $u_{n+1} < \alpha u_n$ pour tout $n \geq N$. En particulier $u_{N+1} < \alpha u_N$, ensuite on fait une récurrence sur k pour montrer que $u_{N+k} < \alpha^k u_N$: c'est vrai pour $k = 1$, et si c'est vrai pour k , alors on sait que $u_{N+k+1} < \alpha u_{N+k} < \alpha \alpha^k u_N = \alpha^{k+1} u_N$. D'où le résultat.

3) a) (0,5 pts) On a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}$ qui est positif. Donc (v_n) est croissante.

b) (2 pts) Pour $n \geq N$ on

$$v_n = \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n u_k.$$

La première somme est constante (elle ne dépend pas de n). La deuxième s'écrit $\sum_{k=1}^{n-N} u_{N+k}$ que l'on peut majorer par $\sum_{k=1}^{n-N} \alpha^k u_N$. On reconnaît une somme de suite géométrique, que l'on sait calculer

$$\sum_{k=1}^{n-N} \alpha^k = \frac{\alpha - \alpha^{n-N+1}}{1 - \alpha}.$$

Cette quantité peut être majorée indépendamment de n par $\alpha/(1 - \alpha)$. Au final

$$v_n \leq \sum_{k=0}^N u_k + \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_N.$$

c) (0,5 pts) (v_n) est croissante, majorée, donc convergente.

4) (1 pt) On regarde la suite $u_k = x^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$, qui est à termes > 0 . On a alors $u_{k+1}/u_k = x/k$ qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer les résultats précédents et la suite $\sum_{k=0}^n u_k$ est convergente.

Exercice 2 (7 points)

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie fixée de E . Pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ on définit la relation $X \mathcal{R} Y$ si $X \cap A = Y \cap A$.

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
- 2) Quelle est la classe d'équivalence de \emptyset ? Et celle de A ? Et celle de E ?
- 3) Montrez que les classes d'équivalence de \mathcal{R} sont en bijection avec $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A .

Corrigé

1) (1 pt) On doit montrer que la relation est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexive : $X \mathcal{R} X$ est évident.

Symétrique : Si $X \mathcal{R} Y$ alors $X \cap A = Y \cap A$ donc $Y \mathcal{R} X$ clairement

Transitive : Si $X \mathcal{R} Y$ et $Y \mathcal{R} Z$ alors $X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$ donc $X \mathcal{R} Z$.

2) (3 pt)

$$[\emptyset] = \{X \in \mathcal{P}(E), X \mathcal{R} \emptyset\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = \emptyset \cap A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = \emptyset\} = \{X \in \mathcal{P}(A^c)\}.$$

$$[A] = \{X \in \mathcal{P}(E), X \mathcal{R} A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = A \cap A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), A \subset X\}.$$

$$[E] = \{X \in \mathcal{P}(E), X \mathcal{R} E\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = E \cap A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \cap A = A\} = \{X \in \mathcal{P}(E), A \subset X\}.$$

3) (3 pt) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, alors posons $B = X \cap A$ qui est un élément de $\mathcal{P}(A)$.

$$[X] = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \mathcal{R} X\} = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \cap A = X \cap A\} = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \cap A = B\}.$$

$$[B] = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \mathcal{R} B\} = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \cap A = B \cap A\} = \{Y \in \mathcal{P}(E), Y \cap A = B\}.$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $[X] = [X \cap A]$.

D'autre part, si B et B' sont deux parties distinctes de A il est clair que $[B] \neq [B']$ car $B \cap A \neq B' \cap A$.

L'application qui à chaque $B \in \mathcal{P}(A)$ associe $[B]$ est injective car $(B \neq B') \Rightarrow ([B] \neq [B'])$. Elle est aussi surjective (dans l'ensemble des classes d'équivalences) car toute classe d'équivalence est de la forme $[B]$ avec $B \subset A$. C'est donc une bijection.

Exercice 3 (9 points)

On considère la fonction

$$f(x) = x^{1/x}$$

définie sur \mathbb{R}_+^* .

- 1) a) Etudiez les variations de f .
 - b) Calculez ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
 - c) Tracez un graphe
 - c) Montrez qu'elle admet un unique maximum, à déterminer.
- 2) Soit $A = \{x^{1/x}; x \in \mathbb{R}_+^*\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Déterminez, en prouvant vos affirmations, $\inf A$ et $\sup A$.
- 3) Soit $B = \{n^{1/n}; n \in \mathbb{N}^*\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Déterminez, en prouvant vos affirmations, $\inf B$ et $\sup B$.

Corrigé

1) a) (2 pts) La fonction f s'écrit $f(x) = e^{\ln(x)/x}$. Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée vaut

$$\frac{1}{x^2}(1 - \ln(x)) e^{\ln(x)/x}.$$

Le signe de la dérivée est le même que celui de $1 - \ln(x)$, donc f est strictement croissante sur $]0, e]$, strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

b) (2 pts) La limite en $0+$ de $\ln(x)/x$ est $-\infty$, donc celle de f est 0 en $0+$.

La limite de $\ln(x)/x$ en $+\infty$ est 0 par croissance comparée, donc celle de f est 1 en $+\infty$.

c) (0,5 pts)

d) (0,5 pts) f étant strictement croissante sur $]0, e]$, strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, son unique maximum est en $x = e$ où elle vaut $e^{1/e}$.

2) (2 pts) Comme f atteint un max sur son domaine de définition, alors clairement $\sup A = \max A = e^{1/e}$.

La fonction f est strictement positive, donc 0 est un minorant. Mais comme $\lim_{0+} f = 0$, c'est le plus grand des minorant (en effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x > 0$ tel que $f(x) < \varepsilon$). Donc $\inf A = 0$.

3) (2 pts) On regarde les valeurs de f uniquement sur les $x \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x = 1$ on $f(1) = 1$. Mais, par le tableau de variation et les limites de f , on sait que $f(x) > 1$ pour toutes les valeurs de $x > 1$. Donc clairement $\inf B = \min B = 1$.

Le maximum de f est atteint en e . On regarde les valeurs de f en 2 et en 3. Du fait des variations de f , il est clair que ces valeurs sont les deux plus grandes pour f sur \mathbb{N}^* . Reste à savoir laquelle est la plus grande des 2. Il faut comparer $3^{1/3}$ et $\sqrt{2}$. Ce qui revient à comparer 3 et $2\sqrt{2}$, ou encore à comparer 9 et 8. Donc la plus grande valeur est $3^{1/3}$. C'est le sup et le max de B .

Exercice 4 (8,5 points)

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Etudiez les variations de f .
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x .
3. Quels sont les points fixes de f ?
4. Montrez qu'il existe exactement deux réels $\alpha_1 < \alpha_2$ tels que $f(\alpha_i) = 2$.
5. Montrez que l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ est stable par f . Montrez que l'intervalle $[\alpha_2, +\infty[$ est stable par f . Quelle est l'image de l'intervalle $] - \infty, \alpha_1]$ par f ?
6. Discutez entièrement du comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 : croissance, convergence, divergence etc.

Corrigé

1) (0,5 pts) Polynôme de degré 2 à coefficient de x^2 strictement positif. Donc elle atteint un min en $x = -b/2a = 4/3$. Avant cette valeur elle est décroissante, après elle est croissante.

2) (0,5 pts) $f(x) - x = 3/4x^2 - 3x + 3$. Son discriminant vaut 0, donc cette fonction est positive sur \mathbb{R} .

3) (0,5 pts) On résout $f(x) = x$, c'est à dire on cherche l'unique racine de $f(x) - x$. On trouve $x = 2$ par les formules habituelles.

4) (1 pt) La valeur de f en son minimum $x = 4/3$ est égale à $5/3 < 2$. Par les variations de f , sa continuité et le TVI, il existe une unique solution à $f(x) = 2$ sur l'intervalle $] - \infty, 4/3[$ et une unique solution sur $]4/3, +\infty[$.

On peut d'ailleurs les déterminer en résolvant directement $f(x) = 2$. On trouve $\alpha_1 = 2/3$ et $\alpha_2 = 2$.

5) (3 pts)

La fonction f est continue décroissante sur $[\alpha_1, 4/3]$ donc l'image de cet intervalle est $[5/3, 2]$. La fonction f est continue croissante sur $[4/3, \alpha_2]$ donc l'image de cet intervalle est $[5/3, 2]$. Au final $f[[\alpha_1, \alpha_2]] = [5/3, 2]$ qui inclut dans $[2/3, 2] = [\alpha_1, \alpha_2]$. D'où la stabilité.

La fonction f est continue croissante sur $[\alpha_2, +\infty[$, donc l'image de cet intervalle par f est $[2, +\infty[$. D'où la stabilité.

Sur $] - \infty, \alpha_1]$ la fonction f est continue décroissante, donc l'image de cet intervalle est $[f(\alpha_1), +\infty[= [2, +\infty[$.

6) (3 pts)

L'étude du signe de $f(x) - x$ nous dit que la suite (u_n) est toujours croissante.

Si $u_0 = 2$, la suite (u_n) est stationnaire.

Si $u_0 = \alpha_1$ alors $u_1 = 2$ et ensuite la suite est stationnaire.

Si $u_0 \in]\alpha_1, \alpha_2[$, alors toute la suite (u_n) est dans cet intervalle (stabilité), elle est croissante, majorée par $\alpha_2 = 2$, donc elle converge. La fonction f est continue, donc la seule limite possible pour (u_n) est un point fixe de f . C'est à dire 2.

Si $u_0 \in]\alpha_2, +\infty[$, la suite reste dans cet intervalle (stabilité) et elle est croissante. Donc soit elle converge vers une valeur finie, soit elle tend vers $+\infty$. Elle ne peut pas tendre vers une valeur finie, car sinon elle devrait tendre vers 2, ce qui est impossible puisque $u_0 > 2$ et (u_n) croissante.

Si $u_0 \in]-\infty, \alpha_1[$, on sait que $u_1 \in]\alpha_2, +\infty[$ et qu'ensuite c'est le même comportement que décrit ci-dessus.