Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2023-2024
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 — 8 novembre 2023

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (5 points)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe et qu'elle est strictement inférieure à 1.
1) Montrez qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant N$ on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha\,.$$

2) En déduire que pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{N+k} < \alpha^k\, u_N$.
3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

a) Montrez que cette suite est croissante.
b) Montrez qu'elle est majorée (découpez la somme $\sum_{k=0}^{n}$ en $\sum_{k=0}^{N} + \sum_{k=N+1}^{n}$).
c) Montrez qu'elle est convergente.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que la suite définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

est convergente.

Exercice 2 (4 points)
Soit E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie fixée de E. Pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ on définit la relation $X\mathscr{R}Y$ si $X \cap A = Y \cap A$.
1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2) Quelle est la classe d'équivalence de $\emptyset$? Et celle de A ? Et celle de E ?
3) Montrez que les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont en bijection avec $\mathscr{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

Exercice 3 (6 points)
On considère la fonction
$$f(x) = x^{1/x}$$
définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Etudiez les variations de f.
   b) Calculez ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
   c) Tracez un graphe
   c) Montrez qu'elle admet un unique maximum, à déterminer.

2) Soit $A = \{x^{1/x} \ ; \ x \in \mathbb{R}_+^*\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Déterminez, en prouvant vos affirmations, $\inf A$ et $\sup A$.

3) Soit $B = \{n^{1/n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Déterminez, en prouvant vos affirmations, $\inf B$ et $\sup B$.

Exercice 4 (7 points)
On considère la fonction
$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$$
ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,. \end{cases}$$

1. Etudiez les variations de f.
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
3. Quels sont les points fixes de f ?
4. Montrez qu'il existe exactement deux réels $\alpha_1 < \alpha_2$ tels que $f(\alpha_i) = 2$.
5. Montrez que l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ est stable par f. Montrez que l'intervalle $[\alpha_2, +\infty[$ est stable par f. Quelle est l'image de l'intervalle $]-\infty, \alpha_1]$ par f ?
6. Discutez entièrement du comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 : croissance, convergence, divergence etc.