Mathématiques - DS n°2 CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Soit X un ensemble.

1. Donner un exemple d'une injection $X \to \mathcal{P}(X)$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.
2. Définir quand deux ensembles X et Y sont *équipotents*.
3. Dans cette partie, on s'apprête à montrer que X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents. Par l'absurde, on suppose que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ est une surjection. On pose $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
   (a) Montrer qu'il y a $x_0 \in X$ avec $f(x_0) = Y$.
   (b) Etudier la question si $x_0 \in f(x_0)$.
   (c) Conclure.

Solution.

1. On peut prendre l'application $x \mapsto \{x\}$ de X dans $\mathcal{P}(X)$.
2. X et Y sont équipotents s'il y a une bijection entre les deux.
3. (a) f est surjectif, donc $\mathrm{im}(f) = \mathcal{P}(X)$. Comme $Y \in \mathcal{P}(X)$ il y a $x_0 \in X$ avec $f(x_0) = Y$.
   (b) Supposons que $x_0 \in f(x_0)$. Alors $x_0 \in Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Donc $x_0 \notin f(x_0)$, une contradiction.
   Suppsosons que $x_0 \notin f(x_0)$. Alors $x_0 \in \{x \in X : x \notin f(x)\} = Y = f(x_0)$, encore un contradiction.
   (c) Les deux possibilités étant contradictoire, l'hypothèse que f soit surjectif est absurde. Ainsi X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents.

Exercice 2 :

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
$$a) \qquad (P \text{ et } Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow R) \qquad\qquad b) \qquad \text{non}(P \Rightarrow Q) \text{ ou } R.$$
2. Montrer qu'une partie $X \subseteq \mathbb{N}$ est infini si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $x \in X$ avec $x \geq n$.
3. Soient $X \subseteq \mathbb{N}$ et $Y \subseteq \mathbb{N}$. Exprimer avec quantificateurs en langage formel :
$$\text{Si } \mathbb{N} \subseteq X \cup Y, \text{ alors } X \text{ est infini ou } Y \text{ est infini.}$$
   Vous ne pouvez quantifier que sur les entiers. Il peut être utile d'utiliser la partie 2.

Solution.

1. Par table de vérité :

P	Q	R	P et Q	$Q \Rightarrow R$	$a)$	$P \Rightarrow Q$	non$(P \Rightarrow Q)$	$b)$
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F

Les colonnes a) et b) étant différentes, les deux propositions ne sont pas équivalentes. (Remarque : La deuxième proposition aurait dû être (non$P \Rightarrow Q$) ou R. Celle-ci est équivalente à a).)

2. D'après un théorème du cours, une partie X de $\mathbb{N}$ est fini si et seulement si elle est majorée. Mais x est majorée si et seulement s'il y a $n \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in X$ on a $x \leq n$, et donc $x < n+1$. L'énoncé en découle par contraposée.

   Alternative. Soit X fini. Alors $\max X$ existe ; si $n = 1 + \max X$, alors il n'y a pas de $x \in X$ avec $x \geq n$. Réciproquement, s'il a $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$ on a $x < n$, alors $X \subseteq [\![1, n]\!]$; une partie d'un ensemble est fini, donc X est fini.

3. $$\begin{aligned}\big[\forall\, x \in \mathbb{N}\, (x \in X \text{ ou } x \in Y)\big] \Rightarrow \big(\big[\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, x \in \mathbb{N}\, (x \in X \text{ et } x \geq n)\big] \text{ ou}\\ \big[\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, x \in \mathbb{N}\, (x \in Y \text{ et } x \geq n)\big]\big).\end{aligned}$$

<u>Exercice 3 :</u> Soit $n \geq 0$ entier. Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \ldots, 6n\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?

Solution.

1. Soit X l'ensemble de bijections de $\{1, \ldots, 6n\}$ dans lui-même tel que $f(n)$ est pair pour n pair. Alors pour $f \in X$ on a $f(n)$ est impair pour n impair.

   Soit X_i l'ensemble des bijections de $\{1, 3, \ldots, 6n-1\}$ dans lui-même, et X_p l'ensemble des bijections de $\{2, 4, \ldots, 6n\}$ dans lui-même. Alors tout $f \in X$ se décompose en un $f_i \in X_i$ et un $f_p \in X_p$; inversement un $f_i \in X_i$ et un $f_p \in X_p$ donnent un $f \in X$.

   Or, le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal p est égal au nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal p, soit $p!$. Ainsi
   $$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(X_i \times X_p) = \operatorname{card}(X_i) \cdot \operatorname{card}(X_p) = ((3n)!)^2.$$

2. Soit Y l'ensemble de bijections de $\{1, \ldots, 6n\}$ dans lui-même tel que $f(n)$ est divisible par 3 pour n divisible par 3. Alors pour $f \in X$ on a $f(n)$ n'est pas divisible par 3 si n n'est pas divisible par 3.

   Soit Y_d l'ensemble des bijections de $\{3, 6, \ldots, 6n\}$ dans lui-même, et X_n l'ensemble des bijections de $\{1, 2, 4, 5, 7, \ldots, 6n-2, 6n-1\}$ dans lui-même. Alors tout $f \in Y$ se décompose en un $f_d \in Y_d$ et un $f_n \in Y_n$; inversement un $f_d \in Y_d$ et un $f_n \in Y_n$ donnent un $f \in Y$.
   Ainsi
   $$\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(Y_d \times Y_n) = \operatorname{card}(Y_d) \cdot \operatorname{card}(Y_n) = (2n)! \cdot (4n)!$$

3. Soit Z l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, 6n\}$ dans lui-même tel que $f(n)$ est pair pour n pair et $f(n)$ est divisible par 3 pour n divisible par 3. Soit Z_6 l'ensemble des bijections de $\{6, 12, \ldots, 6n\}$ dans lui-même, Z_2 l'ensemble des bijections de $\{n \in [\![1, 6n]\!] : n \text{ pair}, 3 \text{ ne divise pas } n\}$ dans lui-même, Z_3 l'ensemble des bijections de $\{n \in [\![1, 6n]\!] : n \text{ impair}, 3 \text{ divise } n\}$ dans lui-même, et Z_n l'ensemble des bijections de $\{n \in [\![1, 6n]\!] : n \text{ impair}, 3 \text{ ne divise pas } n\}$ dans lui-même. Alors tout $f \in Z$ se décompose en un $f_6 \in Z_6$, un $f_2 \in Z_2$, un $f_3 \in Z_3$ et un $f_n \in Z_n$; inversement un $f_6 \in Z_6$, un $f_2 \in Z_2$, un $f_3 \in Z_3$ et un $f_n \in Z_n$ donnent un $f \in Z$.
   Ainsi
   $$\begin{aligned}\operatorname{card}(Z) &= \operatorname{card}(Z_6 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_n)\\ &= \operatorname{card}(Z_6) \cdot \operatorname{card}(Z_2) \cdot \operatorname{card}(Z_3) \cdot \operatorname{card}(Z_n) = n! \cdot (2n)! \cdot n! \cdot (2n)! = \big(n!\,(2n)!\big)^2.\end{aligned}$$

<u>Exercice 4 :</u> On considère la fonction réelle
$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sinh(x)}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Déterminer la parité et la périodicité de f.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
4. Calculer la fonction dérivée de f.

5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ il y a exactement une solution a_n pour l'équation $\tan x = \tanh x$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$.
6. De la partie 5., déduire le signe de f', et donner le tableau de variations de f.
7. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$. En déduire la limite de f en 0.
8. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
9. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. sin et sinh sont définis sur $\mathbb{R}$, et $\sinh x = 0$ ssi $x = 0$. Don le domaine maximal est $D = \mathbb{R}^\times$.
2. sin et sinh sont impaires, donc f est paire. sin est périodique de période 2π mais sinh n'est pas périodique (mais tend vers $\pm\infty$), donc f n'a pas de périodicité.
3. $-1 \le \sin x \le 1$ pour tout x, et $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
4. $f'(x) = \frac{\cos x\, \sinh x - \sin x\, \cosh x}{\sinh^2 x}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ la fonction $g(x) = \tan x - \tanh x$ est dérivable, avec $g'(x) = 1 + \tan^2 x - (1 - \tanh^2 x) = \tan^2 x + \tanh^2 x > 0$ pour $x \neq 0$. Donc g est strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to n\pi\pm\pi/2} g(x) = \pm\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g a un unique zéro $a_n \in]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$. Ainsi a_n est l'unique point x dans l'intervalle où $\tan x = \tanh x$.
6. On pose $h(x) = \cos x\, \sinh x - \sin x\, \cosh x = \cos x \cosh x\,(\tanh x - \tan x)$ (pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$). Le signe de f' est celui de h puisque $\sinh^2 \ge 0$. Or, h est continue. Si $\cos x = 0$, alors $\sin x \cosh x \neq 0$ et $h(x) \neq 0$. Donc $h(x) = 0$ ssi $\tanh x = \tan x$ ssi $x \in \{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$. On a
$$h'(x) = -\sin x \sinh x + \cos x \cosh x - \cos x \cosh x - \sin x \sinh x = -2 \sin x \sinh x.$$
Ainsi $h'(x) = 0$ ssi $x \in \pi\mathbb{Z}$ et le seul zéro commun de h et h' est 0. Donc h change de signe à chaque a_n y inclus en $a_0 = 0$ (par parité). Ceci donne comme tableau de variations :

x	$-\infty$	$\dots$	a_{2n-1}	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	a_{2n}	$\frac{\pi}{2}+n\pi$	a_{2n+1}	$\dots$	∞
f'		$\cdots$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$	
f	0			$\nearrow$		$\searrow$			0

7. On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sinh 0}{x - 0} = \sinh'(0) = \cosh(0) = 1$. Donc
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \Big/ \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \Big/ \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1/1 = 1.$$
8. Il y a une asymptôte horizontale $y = 0$ en $\pm\infty$.
9.