
Mathématiques - DS n°2 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Soit X un ensemble.

1. Donner un exemple d'une injection $X \to \mathcal{P}(X)$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.
2. Définir quand deux ensembles X et Y sont *équipotents*.
3. Dans cette partie, on s'apprête à montrer que X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents. Par l'absurde, on suppose que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ est une surjection. On pose $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
   (a) Montrer qu'il y a $x_0 \in X$ avec $f(x_0) = Y$.
   (b) Etudier la question si $x_0 \in f(x_0)$.
   (c) Conclure.

Exercice 2 :

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$a) \qquad (P \text{ et } Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow R) \qquad\qquad b) \qquad \text{non}(P \Rightarrow Q) \text{ ou } R.$$

2. Montrer qu'une partie $X \subseteq \mathbb{N}$ est infini si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $x \in X$ avec $x \geq n$.
3. Soient $X \subseteq \mathbb{N}$ et $Y \subseteq \mathbb{N}$. Exprimer avec quantificateurs en langage formel :

$$\text{Si } \mathbb{N} \subseteq X \cup Y, \text{ alors } X \text{ est infini ou } Y \text{ est infini.}$$

   Vous ne pouvez quantifier que sur les entiers. Il peut être utile d'utiliser la partie 2.

Exercice 3 : Soit $n \geq 0$ entier. Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 6n\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?

Exercice 4 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sinh(x)}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Déterminer la parité et la périodicité de f.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ il y a exactement une solution a_n pour l'équation $\tan x = \tanh x$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
6. De la partie 5., déduire le signe de f', et donner le tableau de variations de f.
7. Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x}$. En déduire la limite de f en 0.
8. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
9. Dresser le graphe de f.