Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre d'automne 2023-2024
Cursus préparatoire : Algèbre 1 et Analyse 1 | 11 octobre 2023

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* **recto-verso**. *Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 **A** *Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Dans chaque cas, justifiez votre réponse.*

1. *(0,5 pt)* $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$.
2. *(0,5 pt)* $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant m$.

Réponse :
1. Selon le premier énoncé, il existe un nombre naturel inférieur ou égal à tous les autres nombres naturels. Ceci est vrai puisque 0 est ce nombre naturel.
2. Selon le deuxième énoncé, il existe un plus grand nombre naturel. Ceci est faux puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ n < n+1$.

B *Exprimer les énoncés suivants à l'aide des quantificateurs :*

1. *(1 pt) L'ensemble des nombres réels n'a pas de plus petit élément.*
2. *(1 pt) Pour tout nombre réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ plus petit que x.*
3. *(1 pt) Pour tout nombre réel x, il existe un plus grand entier plus petit que x.*

Réponse :
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, y < x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{Z}, y < x$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{Z}, (y < x \text{ et } \forall z \in \mathbb{R}, (z < x \Rightarrow z \leqslant y))$

Exercice 2 *Soient E un ensemble et A, B et C deux sous-ensembles de E. Montrer les identités suivantes :*

1. *(0,5 pt)* $E \setminus (E \setminus C) = C$.
2. *(0,5 pt)* $E \setminus (B \cup C) = (E \setminus B) \cap (E \setminus C)$.
3. *(1 pt)* $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. *(1 pt)* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
5. *(1 pt)* $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

Réponse :
1. $x \in C \ \Leftrightarrow\ x \notin E \setminus C \ \Leftrightarrow\ x \in E \setminus (E \setminus C)$.
2. $x \in E \setminus (B \cup C) \ \Leftrightarrow\ x \notin B \cup C \ \Leftrightarrow\ x \notin B$ et $x \notin C \ \Leftrightarrow\ x \in (E \setminus C) \cap (E \setminus C)$.
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap (E \setminus B)) \cap (E \setminus C) = A \cap ((E \setminus B) \cap (E \setminus C)) \overset{2.}{=} A \cap (E \setminus (B \cup C)) = A \setminus (B \cup C)$.
4. $A \setminus (B \setminus C) = A \cap\ (E \setminus (B \cap E \setminus C)) = A \cap ((E \setminus B) \cup (E \setminus (E \setminus C))) = A \cap ((E \setminus B) \cup C) = (A \cap (E \setminus B)) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
5. Si $x \in (A \setminus B) \setminus C$ alors d'après le point 3. $x \in A \setminus (B \cup C)$. En d'autres termes, $x \in A$ et $x \notin B \cup C$, soit encore $x \notin B$ et $x \notin C$. En particulier, $x \notin B$. Nous avons donc montré que $x \in A \setminus B$. Alors, l'égalité du point 4. nous permet de conclure puisque $A \setminus B$ est un sous-ensemble de son membre de droite.

Exercice 3 (3 pts) *Soient A, B, C, D quatre ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ trois applications. Montrer l'équivalence suivante :*

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives} \quad \Leftrightarrow \quad f, g, h \text{ sont bijectives.}$$

Réponse :
L'implication de droite à gauche est une conséquence directe du fait que la composition de deux bijections est une bijection. De gauche à droite, nous nous servons des caractérisations respectives des surjections et des injections. En effet, comme $h \circ g$ est une injection, g en est une aussi ; comme $g \circ f$ est une surjection, g en est une aussi. Par conséquent, g est à la fois surjective et injective, donc bijective. Il s'en ensuit que la fonction réciproque g^{-1} est bien-définie et bijective. Comme $h = h \circ \text{ id }_C = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$, h s'écrit comme la composition de deux bijections. On conclut que h est une bijection. Un raisonnement similaire s'applique à f et montre que f aussi est une bijection.

Exercice 4 *On définit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \longmapsto & \frac{e^x+2}{e^{-x}} \end{array}$$

1. *(1 pt) Montrer qu'une fonction réelle strictement croissante est injective.*
2. *(1 pt) Déduire du premier point que f est injective.*
3. *(1,5 pts) On fixe $y \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer x tel que $f(x) = y$ et en déduire que f est surjective.*
4. *(0,5 pt) Définir la fonction réciproque f^{-1}.*

Réponse :
1. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante. Il faut et il suffit de montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$. On peut procéder par la méthode de la contraposée en admettant que $x \neq y$. Alors, soit $x < y$, soit $y < x$. On peut se mettre dans la première possibilité, la deuxième se faisant par le même raisonnement. Alors, on admet que $x < y$. Comme h est strictement croissante, $h(x) < h(y)$. Dans le deuxième cas, on aboutira à la solution $h(x) > h(y)$. Donc, h est une injection.

2. Après simplification, $f(x) = e^{2x} + 2e^x$. La dérivée de cette fonction est $f'(x) = 2e^{2x} + 2e^x$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} + 2e^x > 0$. En d'autres termes f' est strictement positive, et par conséquent, f est strictement croissante.

3. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On essaye de résoudre l'équation $y = e^{2x} + 2e^x$. On pose $X = e^x$. Alors l'égalité devient $y = X^2 + 2X$. Nous essayons donc de trouver les racines de l'équation $X^2 + 2X - y = 0$. Le discriminant est $4 + 4y$. Comme $y > 0$, le discriminant est strictement positif. Il y a deux solutions distinctes : $-1 \pm \sqrt{1+y}$. Comme $y > 0$, on n'en retient que $-1 + \sqrt{1+y}$. Alors $x = \ln(X) = \ln(-1 + \sqrt{1+y})$. Nous avons montré que chaque élément de $\mathbb{R}_+^*$ a un antécédent, en d'autres termes, que f est une surjection.

4.
$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(-1 + \sqrt{1+x}) \end{array}$$

Exercice 5

1. *(1 pt) Montrer que* $\forall x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.
2. *(1 pt) Déterminer la valeur exacte de* $\arcsin(\cos(9\pi/5))$.
3. *(1 pt)* $\forall x \in \mathbb{R}$, *montrer que* $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. *(1 pt) Déterminer les solutions de l'équation*

$$\arcsin(x) = \arcsin(1/3) \ + \ \arccos(1/5) \ .$$

(Votre réponse doit consister en nombres réels mais PAS d'expressions faisant intervenir des fonctions trigonométriques ou leurs réciproques.)

Réponse :
1. On définit la fonction $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque $x \in]-1,1[$, $\arccos(x) + \arcsin(x)$. C'est une fonction dérivable selon les résultats de cours et la dérivée est $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Par conséquent, f est constante sur son domaine de définition. Pour déterminer sa valeur, il suffit de calculer $f(x)$ pour une valeur simple. Par exemple, $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \pi/2 + 0 = \pi/2$. Il reste à raisonner pour les deux valeurs -1 et 1 pour lesquelles les dérivées de arccos et arcsin ne sont pas définies. On les fait à la main. (*La technique pour répondre à cette question peut s'utiliser pour toute question faisant intervenir une fonction dérivable.*)

2. On peut d'abord se servir du point précédent de l'exercice pour écrire que $\arcsin(\cos(9\pi/5)) = \pi/2 - \arccos(\cos(9\pi/5))$. Comme $\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = \cos(x)$, on remplace $9\pi/5$ par un angle sur l'intervalle $[0,\pi]$. On peut par exemple constater que $\cos(9\pi/5) = \cos(9\pi/5 - 2\pi) = \cos(-\pi/5) = \cos(\pi/5)$. Alors, $\pi/2 - \arccos(\cos(9\pi/5)) = \pi/2 - \arccos(\cos(\pi/5)) = \pi/2 - \pi/5 = 3\pi/10$.

3. On rappelle d'abord l'identité liant les fonctions cos et tan : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},\ 1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$. Alors $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$. Il s'ensuit que

$$|\cos(\arctan(x))| = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad .$$

Or, l'ensemble d'arrivée de arctan est l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et sur cet intervalle cos n'admet que des valeurs positives. Par conséquent, $|\cos(\arctan(x))| = \cos(\arctan(x))$.

4. Nous utiliserons l'identité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$. Dans notre cas, on obtient

$$\sin(\arcsin(1/3) \ + \ \arccos(1/5)) = \sin(\arcsin(1/3))\cos(\arccos(1/5)) + \sin(\arccos(1/5))\cos(\arcsin(1/3)) \ .$$

Le premier terme se simplifie et devient $1/3 \times 1/5 = 1/15$. Pour le deuxième terme, on se sert de l'identité trigonométrique $\forall x \in \mathbb{R}\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour calculer $\sin(\arccos(1/5))$ et $\cos(\arcsin(1/3))$. Comme sur l'ensemble d'arrivée de arcsin (resp. arccos) cos (resp. sin) est positif, on a

$$\sin(\arccos(1/5)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(1/5))} = \sqrt{1 - 1/25} = 2\sqrt{6}/5 \quad ,$$

$$\cos(\arcsin(1/3)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(1/3))} = \sqrt{1 - 1/9} = 2\sqrt{2}/3 \quad .$$

Il suffit de faire le calcul $1/15 + 2\sqrt{6}/5 \times 2\sqrt{2}/3 = \frac{1+8\sqrt{3}}{15}$.

Exercice 6 *On définit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \end{array}$$

1. *(1 pt) Déterminer le domaine maximal de définition de f. Cet ensemble sera noté D_f.*
2. *(1 pt) Montrer que $\forall x \in D_f, f(x+2\pi) = f(x)$, et que f est une fonction impaire. Choisissez un domaine d'étude de la fonction f de longueur au plus 2π.*
3. *(1,5 pt) Montrer que*

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty \ (\textbf{il y avait une erreur dans l'énoncé}) \ .$$

En déduire $\lim_{x \to -\pi^+} f(x)$.

4. *(2 pts) Déterminer la dérivée f' de f, et dresser le tableau de variations de f sur le domaine d'étude que vous avez choisi.*

5. *(0,5 pt) Quelles sont les asymptotes de f ?*
6. *(1 pt) En vous servant d'un repère orthonormé, tracer le graphe de f restreinte à l'intervalle* $]-2\pi, 2\pi[$.

Réponse :
1. Comme la loi qui définit la fonction f est un quotient, il faut que son dénominateur soit non nul. Comme le reste des expressions dans $\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ sont définies sur $\mathbb{R}$, le domaine maximal de définition est $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Comme sin et cos sont périodiques de période 2π, $\forall x \in D_f, f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{1+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = f(x)$. Comme *sin* est une fonction impaire et que cos est une fonction paire, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = -f(x)$. Ainsi f est une fonction impaire.

À partir de maintenant, le domaine d'étude de f sera l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Ceci dit, en nous servant de l'imparité de f, il suffirait de nous restreindre à $[0, \pi[$.

3. Pour déterminer $\lim_{x\to\pi^-} f(x)$, on remarque que si $x \neq \pi$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\frac{\sin(x)-\sin(\pi)}{x-\pi}}{\frac{1+\cos(x)-1-\cos(\pi)}{x-\pi}} .$$

Alors quand x tend vers π^-, le numérateur tend vers $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$ et le dénominateur $-\sin(\pi^-) = 0^-$. Il en découle que la limite est $+\infty$. Comme f est impaire, $\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = -\infty$.

4. La règle du quotient montre que $f'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$. C'est une expression strictement positive. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$			π
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$

5. La fonction f a une infinité d'asymptotes verticales : toute droite d'équation $x = (2k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

6. Le monde selon geogebra :