Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024
Cursus préparatoire : Algèbre 1 et Analyse 1 11 octobre 2023

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* **recto-verso**. *Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 **A** Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Dans chaque cas, justifiez votre réponse.

1. (0,5 pt) $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant n.$
2. (0,5 pt) $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant m.$

B Exprimer les énoncés suivants à l'aide des quantificateurs :

1. (1 pt) L'ensemble des nombres réels n'a pas de plus petit élément.
2. (1 pt) Pour tout nombre réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ plus petit que x.
3. (1 pt) Pour tout nombre réel x, il existe un plus grand entier plus petit que x.

Exercice 2 Soient E un ensemble et A, B et C deux sous-ensembles de E. Montrer les identités suivantes :

1. (0,5 pt) $E \setminus (E \setminus C) = C$.
2. (0,5 pt) $E \setminus (B \cup C) = (E \setminus B) \cap (E \setminus C)$.
3. (1 pt) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. (1 pt) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
5. (1 pt) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

Exercice 3 (3 pts) Soient A, B, C, D quatre ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ trois applications. Montrer l'équivalence suivante :

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives} \quad \Leftrightarrow \quad f, g, h \text{ sont bijectives.}$$

Exercice 4 On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \longmapsto & \frac{e^x+2}{e^{-x}} \end{array}$$

1. (1 pt) Montrer qu'une fonction réelle strictement croissante est injective.
2. (1 pt) Déduire du premier point que f est injective.
3. (1,5 pts) On fixe $y \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer x tel que $f(x) = y$ et en déduire que f est surjective.
4. (0,5 pt) Définir la fonction réciproque f^{-1}.

Tournez la page s'il vous plaît.

Exercice 5

1. (1 pt) Montrer que $\forall x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.
2. (1 pt) Déterminer la valeur exacte de $\arcsin(\cos(9\pi/5))$.
3. (1 pt) $\forall x \in \mathbb{R}$, montrer que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. (1 pt) Déterminer les solutions de l'équation

$$\arcsin(x) = \arcsin(1/3) \ + \ \arccos(1/5) \ .$$

(Votre réponse doit consister en nombres réels mais PAS d'expressions faisant intervenir des fonctions trigonométriques ou leurs réciproques.)

Exercice 6 On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \end{array}$$

1. (1 pt) Déterminer le domaine maximal de définition de f. Cet ensemble sera noté D_f.
2. (1 pt) Montrer que $\forall x \in D_f, f(x+2\pi) = f(x)$, et que f est une fonction impaire. Choisissez un domaine d'étude de la fonction f de longueur au plus 2π.
3. (1,5 pt) Montrer que
$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty \ .$$
En déduire $\lim_{x \to -\pi^+} f(x)$.
4. (2 pts) Déterminer la dérivée f' de f, et dresser le tableau de variations de f sur le domaine d'étude que vous avez choisi.
5. (0,5 pt) Quelles sont les asymptotes de f ?
6. (1 pt) En vous servant d'un repère orthonormé, tracer le graphe de f restreinte à l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$.
