Mathématiques - DS n°1 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Dans cet exercice, l'utilisation de la formule démontrée en cours pour la somme $0+1+\cdots+(n-1)$ des premiers n entiers n'est pas autorisée.

1. Calculer $(k+1)^2 - k^2$.
2. En déduire la formule pour la somme des n premiers entiers impairs.
3. En déduire la formule pour la somme des n premiers entiers pairs.
4. En déduire la formule pour la somme des n premiers entiers.

Solution.

1. On a
$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$
2. Ainsi la somme des n premiers entiers impairs vaut
$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 - i^2 = (n-1+1)^2 - 0^2 = n^2$$
(somme téléscopique).
3. La somme des n premiers entiers pairs vaut donc
$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i = \sum_{i=0}^{n-1} \big((2i+1) - 1\big) = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) - \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n^2 - n.$$
4. Ainsi la somme des n premiers entiers vaut
$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 2i = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Exercice 2 : On considère l'ensemble $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i + j \leq n\}$.

1. Sur un plan cartésien dessinez T pour $n = 5$.
2. Calculer
$$\sum_{(i,j)\in T} i + j.$$

On rappelle que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Solution.

1. C'est le triangle isocèle de sommets $(0,0)$, $(0,5)$ et $(5,0)$.
2. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in T} i + j &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} i + j = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{n-i} i + \sum_{j=0}^{n-i} j\Big) = \sum_{i=0}^{n} \Big((n-i+1)i + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+i)(n-i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (n^2 + n + i - i^2) \\
&= \frac{1}{2}\Big((n+1)(n^2+n) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\big(6(n+1) + 3 - 2n - 1\big) = \frac{n(n+1)}{12}(4n+8) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Alternative. On somme le long des diagonales $i+j=k$, avec $0 \leq k \leq n$ entier :

$$\sum_{(i,j)\in T} i+j = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)k = \sum_{k=0}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

<u>Exercice 3 :</u> Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que $x_n > 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution.

1. Par récurrence sur n.
   Initialisation : Pour $n = 0$ on a $x_0 = 4 > 3$.
   Hypothèse : $x_n > 3$.
   Hérédité : On a
   $$x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2} = \frac{2x_n - \frac{3}{x_n}}{1+\frac{2}{x_n}} > \frac{2\cdot 3 - \frac{3}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$
   Conclusion : On a $X_n > 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On a
   $$(x_{n+1}-3) - \frac{3}{2}(x_n-3) = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2} - 3 - \frac{3}{2}(x_n-3) = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2} - \frac{1}{2}(3x_n+3) =$$
   $$= \frac{2x_n^2 - 3 - \frac{1}{2}(x_n+3)(x_n+2)}{x_n+2} = \frac{4x_n^2 - 6 - (x_n^2+5x_n+6)}{2(x_n+2)}$$
   $$= \frac{3x_n^2-5x_n-12}{2(x_n+2)} = \frac{(x_n-3)(3x_n+4)}{2(x_n+2)} \geq 0$$
   puisque $x_n > 3$. Ainsi $x_n + 2 - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Par récurrence sur n.
   Initialisation : Pour $n = 0$ on a $x_0 = 4 \geq 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3$.
   Hypothèse : $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
   Hérédité : On a
   $$x_{n+1} > \frac{3}{2}(x_n-3)+3 \geq \frac{3}{2}\Big[\Big(\frac{3}{2}\Big)^n + 3 - 3\Big] + 3 = \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n+1} + 3.$$
   Conclusion : Ainsi $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Puisque $\frac{3}{2} > 1$ on a $\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2})^n = \infty$. Or, $x_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$, et donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

<u>Exercice 4 :</u> On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
3. Calculer la fonction dérivée de f.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
6. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. On a $e^x > 0$, $e^{2x} + 1 > 0$ et donc $e^x + \sqrt{e^{2x}+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi le domaine maximal est $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(0 + \sqrt{0+1}) = \ln 1 = 0$.
   de l'autre coté, $\lim_{n\to\infty} e^x = \infty$, et donc $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$.
3. On a $f(0) = \ln(1+\sqrt{2})$, et donc

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{e^{2x}+1}}\left(e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{2e^x}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\,\frac{\sqrt{e^{2x}+1}+e^x}{2\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} > 0.\right.$$

4. On a $f(0) = \ln(1+\sqrt{2}$, et donc

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	∞

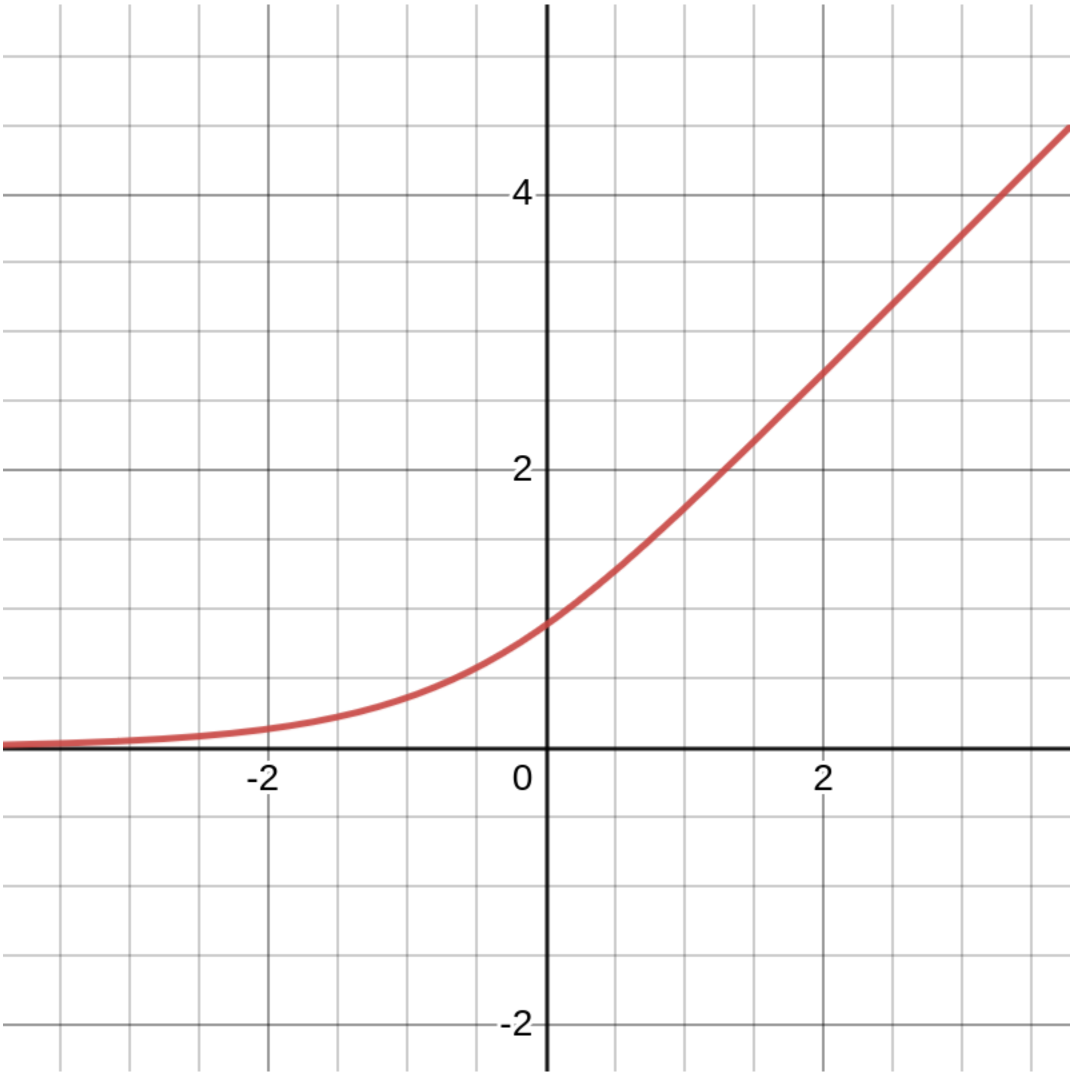
5. On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, et donc une asymptôte horizontale $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$ on calcule

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^x + \ln(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}{x} \\ &= 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}{x} = 1+0 = 1 \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty}(\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}-x) = \lim_{x\to\infty}(\ln e^x + \ln(1+\sqrt{1+e^{-2x}})-x) \\ &= \lim_{x\to\infty}\ln(1+\sqrt{1+e^{-2x}}) = \ln 2. \end{aligned}$$

   En $+\infty$ il y a donc une asymptôte affine $y = x + \ln 2$.



6.