## Mathématiques - DS n°1 CUPGE

Documents et calculettes interdits

**Exercice 1 :** Dans cet exercice, l'utilisation de la formule démontrée en cours pour la somme $0+1+\cdots+(n-1)$ des premiers $n$ entiers n'est pas autorisée.

1. Calculer $(k+1)^2 - k^2$.
2. En déduire la formule pour la somme des $n$ premiers entiers impairs.
3. En déduire la formule pour la somme des $n$ premiers entiers pairs.
4. En déduire la formule pour la somme des $n$ premiers entiers.

**Exercice 2 :** On considère l'ensemble $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i + j \leq n\}$.

1. Sur un plan cartésien dessinez $T$ pour $n = 5$.
2. Calculer

$$\sum_{(i,j)\in T} i + j.$$

On rappelle que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

**Exercice 3 :** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que $x_n > 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}\,(x_n - 3)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

**Exercice 4 :** On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier les éventuelles limites de $f$ aux bornes de son domaine maximal.
3. Calculer la fonction dérivée de $f$.
4. Donner le tableau de variations de $f$.
5. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
6. Dresser le graphe de $f$.