Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'Automne 2023-2024

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 20 Septembre 2023

Correction du Devoir surveillé N°1

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* **recto-verso***. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (3 points)**.**

1. Soit n un entier ≥ 1. Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression suivante :
$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)}.$$
2. Montrer par récurrence sur n que
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Correction.

1. On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. On note P_n la propriété "$S_n = 1 - 1/(n+1)$".

   `Initialisation`. Pour $n = 1$, on a d'un côté $S_1 = 1/(1\times 2) = 1/2$, et de l'autre $1 - 1/(n+1) = 1 - 1/2 = 1/2$. Donc P_1 est vraie.

   `Hérédité`. Soit $n \geq 1$ tel que P_n soit satisfaite. On a
$$\begin{aligned} S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{H.R.}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$
   donc P_{n+1} est vraie.

   `Conclusion` : On a $S_n = 1 - 1/(n+1)$ pour tout $n \geq 1$.
3. D'après la question précédente, on a
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Exercice 2 (7 points)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, +\infty[$. L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes l'inégalité
$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1}$$

1. Vérifier que (1) est satisfaite pour $n = 0, 1, 2$.
2. On suppose désormais $n \geq 3$ et on définit $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = (1+x)^n - (1+nx) \qquad (x \in [-1, +\infty[).$$

   Calculez f' et f''.
3. Etudier les variations de f'.
4. Déduire de la question précédente le signe de $f'(x)$, puis les variations de f.
5. En déduire que (1) est valide pour tout $x \in [-1, +\infty[$.
6. Prouvez directement l'inégalité (1) par récurrence sur n sans utiliser les questions 2. à 5.

Correction.

1. Pour $n = 0$ ou $n = 1$ l'inégalité (1) est en fait une égalité. Pour $n = 2$ et puisque $x^2 \geq 0$, on a

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x,$$

   donc (1) est encore valable.
2. Soit $x \geq -1$. On trouve

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n \quad \text{et} \quad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

3. (Cf. ci-dessous).
4. Pour tout $x \geq -1$ on a $(1+x) \geq 0$, donc $f''(x) \geq 0$ (avec inégalité stricte pour $x > -1$), donc f' est une fonction (strictement) croissante sur $[-1, +\infty[$. On a aussi $f'(-1) = -n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Par ailleurs, $f'(x) = 0$ pour $x = 0$. D'où le tableau.

x	-1		0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$		$+$	
variations de f'	$-n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$n-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   La dernière ligne a été complétée en calculant $f(-1) = 0^n - (1-n) = n-1$, $f(0) = 1^n - (1 - n \times 0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. On déduit de la question précédente que f possède un minimum en $x = 0$ qui vaut $f(0) = 0$. En particulier, pour tout $x \geq -1$ on a $f(x) \geq 0$, ce qui est équivalent à (1).

6. Fixons $x \geq -1$ et notons P_n la propriété "$(1+x)^n \geq 1+nx$".

   `Initialisation` P_0 est vraie d'après la question 1.

   `Hérédité`. Supposons que P_n soit vraie pour un $n \geq 0$ fixé. Alors

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \overset{\text{H.R.}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

   la dernière inégalité se déduisant de $x^2 \geq 0$. Donc P_{n+1} est encore vraie.

   `Conclusion` : on a bien $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3 (4 points)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

On admet que le terme u_n est bien défini et positif (au sens large) pour tout $n \geq 0$. On construit alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Correction.

1. Soit $n \geq 0$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{2u_n+3-(u_n+4)}{2u_n+3+3(u_n+4)} = \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5}v_n.$$

   On a ainsi montré que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $1/5$.

2. On a $v_0 = (u_0-1)/(u_0+3) = -1/3$, et pour tout $n \geq 0$

$$v_n = \frac{1}{5^n} \times v_0 = -\frac{1}{3\times 5^n}.$$

3. Soit $n \geq 0$. On cherche maintenant à exprimer u_n en fonction de v_n. On a

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \Longrightarrow (u_n+3)v_n = u_n - 1 \Longrightarrow u_n(-1+v_n) &= -1-3v_n \\ \Longrightarrow u_n &= -\frac{1+3v_n}{-1+v_n}. \end{aligned}$$

   Combiné avec la question précédente, on en déduit que

$$u_n = -\frac{1-\frac{1}{5^n}}{-1-\frac{1}{3\times 5^n}} = \frac{1-\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{3\times 5^n}} = \frac{5^n-1}{5^n+1/3}.$$

Exercice 4 (6 points + 2 points bonus)**.** Soit $f : x \mapsto e^{-(\ln(x))^2}$.

1. Déterminer $I \subset \mathbb{R}$, le domaine de définition maximal de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ aux bornes de I.

3. Déterminer f' et dresser le tableau de variations de f sur I.
4. On définit $g := I \to \mathbb{R}$ par la formule

$$g(x) = x\ln(x) - x - f(x).$$

   Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
6. (**Bonus.**) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha) - \alpha.$$

Correction.

1. $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$ (et exp est définie sur $\mathbb{R}$), donc $I =]0, +\infty[$.
2. On a

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to +\infty} e^{-y} = 0.$$

   Par composition des limites, on trouve

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-(\ln(x))^2} = 0.$$

   De même, puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x))^2 = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
3. Remarquons d'abord que la dérivée de la fonction $x \mapsto (\ln(x))^2$ vaut $2\ln(x)/x$. En utilisant la formule $(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u$ (qui provient de la formule de la dérivée d'une composition) on trouve alors

$$f'(x) = -\frac{2\ln(x)}{x} e^{-(\ln(x))^2}.$$

   Comme $\exp(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-2\ln(x)/x$, et même simplement celui de $-\ln(x)$ puisque $x > 0$. Remarquons aussi que $\ln(1) = 0$, donc $f(1) = 1$. D'où le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ 0	↗	1	↘	0

4. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, d'où (puisque $f(x)$ tend vers 0 en 0^+)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(x\ln(x) - x - f(x)\big) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) - \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

   D'un autre côté, on a

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \big(x\ln(x) - x - f(x)\big) = \lim_{x\to +\infty} x(\ln(x) - 1) - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x)}_{=0} = +\infty.$$

5. Soit $x > 0$. On commence par calculer $g'(x)$. On a

$$g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 - f'(x) = \ln(x) + \frac{2\ln(x)}{x} e^{-(\ln(x))^2} = \Big(1 + \underbrace{\frac{2e^{-(\ln(x))^2}}{x}}_{>0}\Big)\ln(x).$$

Donc $g'(x)$ est du même signe sur $\ln(x)$. Par ailleurs, un calcul direct montre que

$$g(1) = 1 \times \ln(1) - 1 - f(1) = -2.$$

D'où le tableau de variations suivant

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de g	|| 0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6. (**Bonus.**) Remarquons d'abord que pour tout $\alpha > 0$, on a (par définition de g) l'équivalence

$$f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) = 0.$$

D'après la question précédente, on a $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$. Notons que la fonction g est une fonction continue (somme / composition de fonctions continues). Sur l'intervalle $[1,+\infty[$ la fonction g est strictement croissante et vérifie $g(1) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc par le théorème de la bijection (corollaire du TVI), il existe un unique $\alpha > 1$ tel que $g(\alpha) = 0$.