Devoir surveillé N°1

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (3 points)**.**

1. Soit n un entier ≥ 1. Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression suivante :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

2. Montrer par récurrence sur n que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 2 (7 points)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, +\infty[$. L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes l'inégalité

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1}$$

1. Vérifier que (1) est satisfaite pour $n = 0, 1, 2$.
2. On suppose désormais $n \geq 3$ et on définit $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = (1+x)^n - (1+nx) \qquad (x \in [-1, +\infty[).$$

   Calculez f' et f''.
3. Etudier les variations de f'.
4. Déduire de la question précédente le signe de $f'(x)$, puis les variations de f.
5. En déduire que (1) est valide pour tout $x \in [-1, +\infty[$.
6. Prouvez directement l'inégalité (1) par récurrence sur n sans utiliser les questions 2. à 5.

Exercice 3 (4 points)**.** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

On admet que le terme u_n est bien défini et positif (au sens large) pour tout $n \geq 0$. On construit alors la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4 (6 points + 2 points bonus)**.** Soit $f : x \mapsto e^{-(\ln(x))^2}$.

1. Déterminer $I \subset \mathbb{R}$, le domaine de définition maximal de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ aux bornes de I.
3. Déterminer f' et dresser le tableau de variations de f sur I.
4. On définit $g := I \to \mathbb{R}$ par la formule
$$g(x) = x\ln(x) - x - f(x).$$
Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
6. (**Bonus.**) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que
$$f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha) - \alpha.$$