Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 6

Nombres réels et suites réelles

Exercice 1. Pour chacun des ensembles qui suivent, déterminer s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

a) $[0, 1[$

b) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

c) $\left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\}$

d) $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$

Solution :

a) 0 est la borne inférieure et le minimum de l'intervalle, 1 la borne supérieure mais n'est pas un maximum puisqu'il n'est pas dans l'intervalle. En effet, la suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ est composée de terme de l'intervalle, converge vers 1 et n'est majorée par aucun réel de l'intervalle.

b) Notons $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. D'une part $3/2 \in B$ puisque $3/2 = (-1)^2 + 1/2$, et d'autre part, $\forall n \geq 2$, $3/2 \geq 1 + 1/n \geq (-1)^n + 1/n$, et $3/2 \geq (-1)^1 + 1/1 = 0$, donc $3/2$ est la borne supérieure et le maximum de l'ensemble B. La suite $u_k = -1 + \frac{1}{2k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ est une suite d'éléments de B puisque $-1 + \frac{1}{2k+1} = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n = 2k+1$, et cette suite converge vers -1. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \frac{1}{n} > -1$, donc -1 est la borne inférieure de B et ce n'est pas un minimum.

c) Notons $C = \left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\}$. D'une part $0 \in C$ puisque $0 = \frac{0}{0 \times 1 + 1}$, et d'autre part $\forall x \in C$, $x \geq 0$ donc 0 est la borne inférieure et le minimum de C. Remarquons que puisque $n \geq 1$, alors $\frac{m}{mn+1} \leq \frac{m}{m+1} < 1$. De plus, lorsque $m \to +\infty$, $\frac{m}{m+1} \to 1$ donc 1 est la bonne supérieure de C et n'est pas son maximum.

d) D'une part $0 \in \left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$, d'autre part $\forall q \in \left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$, $q \geq 0$ donc 0 est la borne inférieure et le minimum de cet ensemble. En revanche, $\sqrt{2}$ majore cet ensemble mais n'y appartient pas. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel dans l'intervalle $]\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2}[$, et donc un élément de $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$, c'est donc qu'aucun nombre plus petit que $\sqrt{2}$ majore l'ensemble, et donc $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $-A = \{ -a \,|\, a \in A \}$.
   a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup(-A)$ existe et qu'alors $\inf A = -\sup(-A)$.
   b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf(-A)$ existe et qu'alors $\sup A = -\inf(-A)$.
2. Supposons $B \subseteq A$.
   a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leqslant \sup A$.
   b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geqslant \inf A$.
3. On note $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$. À quelle condition $\sup(A+B)$ existe-t-elle ? Dans ce cas, l'exprimer en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

Solution :

1.

   a) Puisque A est non vide, alors

   $$\begin{aligned}\inf A \text{ existe } &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \\ &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, -m \geq -x \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, M \geq -x \\ &\iff \sup -A \text{ existe.}\end{aligned}$$

   Soit $x \in -A$, $-x \in A$ donc par définition de la borne inférieure $\inf A \leq -x$ et donc $\forall x \in -A, -\inf A \geq x$, donc par définition de la borne supérieure, $\sup(-A) \leq -\inf A$.

   Soit $x \in A$, alors $-x \in -A$ donc $-x \leq \sup(-A)$. Donc $\forall x \in A, x \geq -\sup(-A)$, donc $-\sup(-A) \leq \inf A$. On en conclut que $\sup A = \inf A$.

   b) On applique la question précédente à l'ensemble $-A$. On sait que $\inf(-A)$ existe si et seulement si $\sup(-(-A))$ existe. Or $-(-A) = A$, donc $\inf(-A)$ existe si et seulement si $\sup A$ existe. De plus $\inf(-A) = -\sup(-(-A)) = -\sup A$, d'où le résultat.

2.

   a) A est majorée, donc il existe M tel que $\forall x \in A, x \leq M$. Or $B \subset A$, donc $\forall x \in B, x \in A$ et donc $x \leq M$. Donc B est majorée et non vide et possède donc une borne supérieure. Enfin, $\forall x \in B$, $x \in A$ donc $\forall x \in B, x \leq \sup A$, donc $\sup B \leq \sup A$.

   b) A est minorée, et non vide, donc $\forall x \in A$, $x \geq \inf A$. Or $\forall x \in B$, $x \in A$, donc $x \geq \inf A$, donc d'une part B et minorée et non vide donc possède une borne inférieure, et d'autre part $\inf B \geq \inf A$.

3. Montrons que $\sup(A+B)$ existe si et seulement $\sup A$ et $\sup B$ existent. On commence par le sens $\sup(A+B)$ existe $\Leftarrow$ $\sup A$ et $\sup B$ existent.

   On suppose donc que $\sup A$ et $\sup B$ existent. Alors $\forall (a,b) \in A \times B$, $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$, donc $a + b \leq \sup A + \sup B$, donc $A + B$ est majorée, non vide, et admet donc une borne supérieure. De plus, $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.

   Traitons le sens direct par contraposée. Montrons donc que non($\sup A$ et $\sup B$ existent) $\Rightarrow$ non ($\sup(A+B)$ existe).

   On suppose donc que A ou B n'est pas majorée. Puisque A et B jouent un rôle symétrique, on peut supposer que A n'est pas majorée (quitte à échanger les noms de A et B), c'est à dire qu'il existe une suite d'éléments de A que l'on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $b \in B$. Alors la suite $b_n = a_n + b$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, tend elle aussi vers $+\infty$ par somme des limites. Or c'est une suite d'éléments de $A + B$. Donc $A + B$ n'est pas majorée, elle n'a donc pas de borne supérieure.

   Reste à prouver que lorsque ces bornes supérieures existent, $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$, puisqu'on a déjà montré l'inégalité inversée. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup A$, et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers $\sup B$. Alors la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A + B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc $\sup A + B \geq \sup A + \sup B$, ce qui conclut l'exercice.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de f^* par des figures rapides sur différents exemples de fonctions f.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^*.

Solution :

1. Notons que f^* est toujours définie puisque f est majorée, donc admet une borne supérieure sur n'importe quel sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
2. Si f est croissante, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x) = \max_{x \leq y} f(x) = f(y)$ donc $f^* = f$.
3. Montrons que f^* est croissante. Soit $z \geq y$. $f^*(z) = \sup_{x \leq z} f(x)$, donc $\forall x \leq z$, $f^*(z) \geq f(x)$. Or $\forall x \leq y$, on a que $x \leq z$ puisque $z \geq y$. Donc $\forall x \leq y$, $f^*(z) \geq f(x)$, et donc $\sup_{x \leq y} f^*(z) \geq \sup_{x \leq y} f(x)$. puisque l'expression $f^*(z)$ ne dépend pas de x, on a que $\sup_{x \leq y} f^*(z) = f^*(z)$ et donc $f^*(z) \geq f^*(y)$, c'est à dire que f^* est croissante.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. On veut établir que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
Posons

$$T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leqslant x\}.$$

1. — Démontrer que T possède une borne inférieure t.
   — Démontrer que $f(t)$ minore T.
   — Établir l'inclusion $f(T) \subset T$.
   — En déduire que t est un point fixe de f.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0, 1[$ dans $[0, 1[$?

Solution :

1. — T est une partie non vide de $\mathbb{R}$ puisque $1 \in T$, qui est minorée par 0, donc T admet une borne inférieure que l'on note t.
   — Pur tout $x \in T$, $t \leq x$, on a donc $f(t) \leq f(x)$ puisque f est croissante, or $x \in T$ donc $f(x) \leq x$, donc $f(t) \leq x$, c'est à dire que $f(t)$ minore T.
   — Soit $y \in f(T)$, c'est à dire que $\exists x \in T, f(x) = y$. Puisque $x \in T$, $y = f(x) \leq x$, donc puisque f est croissante, $f(y) \leq f(x) = y$, donc $y \in T$, donc $f(T) \subset T$.
   — Nous venons de montrer en particulier que $f(t) \in T$. Puisque c'est un minorant de T, c'est que $\inf T = f(t)$, donc $t = f(t)$ et c'est donc un point fixe.
2. Non ! La fonction définie par $f(x) = \frac{1+x}{2}$ est croissante et n'a pas de point fixe dans l'intervalle $[0, 1[$. La preuve précédente échoue parce que l'ensemble T est vide et n'a donc pas de borne inférieure !

Exercice 5. On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution : Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, c'est à dire tel que $a < b$. Montrons qu'il existe un nombre dyadique dans l'intervalle $]a, b[$. Puisque la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < b - a$, c'est à dire $2^n b - 2^n a > 1$. C'est donc qu'il existe un entier $m \in Z$ tel que $2^n a < m < 2^n b$. Et donc $a < \frac{m}{2^n} < b$. L'ensemble des nombres dyadiques est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.
2. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Solution :

1. Si (u_n) est stationnaire à partir du rang n_0, alors $\forall\varepsilon > 0$ et $\forall n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}| = 0 < \varepsilon$, donc (u_n) converge vers u_{n_0}. (Et ceci est vrai même si (u_n) est à valeur dans $\mathbb{R}$).
   Réciproquement, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq 1/4$. En particulier, on a donc que $|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0} \leq 1/2$. Or dans l'intervalle $[u_{n_0} - 1/2, u_{n_0} + 1/2]$ il n'existe qu'un seul entier : u_{n_0}. Donc pour tout $n \geq n_0$, u_n, qui est un entier dans cet intervalle, ne peut être que u_{n_0}. La suite est donc stationnaire.
2. Puisque D est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, D possède une borne supérieure d. Montrons que $d \in D$ et que c'est donc le plus grand élément de D. Soit (d_n) une suite d'éléments de D qui converge vers D. Puisque c'est une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$, alors d'après la question précédente elle est stationnaire. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{n_0} = d$ et donc $d \in D$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Solution : Par définition, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon = \ell/2$ et l'on a donc qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $|u_n - \ell| \leq l/2$ et donc $\ell - \ell/2 \leq u_n - \ell \leq \ell + \ell/2$ et donc $u_n \geq \ell/2$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Est-ce toujours vrai si $\ell \neq 0$?

Solution :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ puisque $\frac{\varepsilon}{M} > 0$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, ce qui est la définition de $(u_n v_n)$ converge vers 0.
2. Non ! La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée par 1, la suite définie par $v_n = 1$ converge vers 1, mais le produit des deux n'a pas de limite.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (*Indication : on pourra s'intéresser à* $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$ *et* $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$) ;
2. en revenant à la définition de la limite.

Solution :

1. Si $x < y$, alors $\max\{x, y\}+\min\{x, y\} = y+x$. Si au contraire, $x > y$, alors $\max\{x, y\}+\min\{x, y\} = x + y$. Si $x = y$ bien entendu, $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$. Donc dans tous les cas, $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$. De même, $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$, pour s'en convaincre, il suffit de tester les trois cas.

   Or
   $$\max\{x, y\} = \frac{\max\{x, y\} + \min\{x, y\} + \max\{x, y\} - \min\{x, y\}}{2},$$
   et donc
   $$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$
   Ainsi puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, en notant respectivement leurs limites u et v, par somme de limites et continuité de la valeur absolue, la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{u+v+|u-v|}{2} = \max\{u, v\}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, et notons u et v les limites de (u_n) et (v_n). Distinguons deux cas :
   — Si $u = v$, puisque (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers u, on a d'une part
   $$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - u| \leq \varepsilon,$$
   et d'autre part
   $$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - u| \leq \varepsilon$$
   et donc si $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$, c'est à dire si $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, on a à la fois $u_n \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ et $v_n \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$ donc $\max\{u_n, v_n\} \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$ et donc en conclusion,
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, |\max\{u_n, v_n\} - \max\{u, v\}| \leq \varepsilon,$$
   c'est à dire $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\max\{u, v\}$.
   — si $u \neq v$, alors par symétrie du problème, supposons que $u > v$. Alors puisque $(u - v)/2 > 0$ on a d'une part
   $$\exists n_4 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_4, |u_n - u| \leq (u - v)/2,$$
   et d'autre part
   $$\exists n_5 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_5, |v_n - v| \leq (u - v)/2,$$
   et donc $\forall n \geq \max\{n_4, n_5\}$, on a $v_n \leq (u + v)/2 \leq u_n$ et donc $\max\{u_n, v_n\} = u_n$ à partir du rang $n_6 = \max\{n_4, n_5\}$. De ce fait, les deux suites partagent la même limite et donc $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u = \max\{u, v\}$.

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dont le terme général est donné par :

a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, b) $u_n = \left(n+\dfrac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$, c) $u_n = \left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right) - n^2$,

d) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$, e) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, f) $u_n = \dfrac{2n^6+5n+1}{n^6-2}$,

g) $u_n = (-1)^n n$, h) $u_n = \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$, i) $u_n = \sqrt[n]{n}$,

j) $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)-4}{n^2}$, k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$, l) $u_n = \dfrac{(-5)^n+n}{3^n-1}$,

m) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solution :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^3 + 3n^2\frac{2}{n^2} + 3n\frac{4}{n^4} + \frac{8}{n^6} - n^3 = 6 + \frac{12}{n^3} + \frac{8}{n^6}$ donc par somme de limites $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + 1 - 1 - \frac{1}{n^2} - n^2 = \frac{-1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ et donc par somme et produit de limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^6}}{1-2\frac{1}{n^5}}$ donc par somme et produit de limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

g) La suite (u_n) n'a pas de limite, puisque $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, limites qui ne sont pas égales.

h) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(2/3)^n-1}{(2/3)^n+1}$, or $|2/3| < 1$ donc la suite géométrique de terme $(2/3)^n$ converge vers 0, et donc par somme et produit de limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}}\ln(n)$. Par croissance comparée, $\frac{1}{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par composition de limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

j) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{5}{n^2} \leq u_n \leq 2 - \frac{3}{n^2}$, donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

k) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^1$ donc la suite est constante et converge vers son unique valeur, e.

l) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-5/3)^n+\frac{n}{3^n}}{1-(1/3)^n}$. Par propriétés des suites géométriques, $(1/3)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée, $\frac{n}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la suite $(5/3)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi la suite par somme et produit de limites, $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Les limites n'étant pas égales, la suite (u_n) n'a pas de limite.

m) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n = \frac{1\times 2\times \ldots \times n}{n\times n\times \ldots \times n} \leq \frac{1}{n}$ donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Solution : Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

donc

$$\frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \leq u_n \leq 1$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après le théorème des gendarmes $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas .

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n}^2 \rfloor = n - n = 0$, et

$$\begin{aligned} u_{n^2+n} &= \sqrt{n^2+n} - \lfloor \sqrt{n}^2 + n \rfloor \\ &= \sqrt{n^2+n} - n \qquad\qquad \text{car } n^2 \leq n^2+n < (n+1)^2, \\ &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = n\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. \end{aligned}$$

   Par somme, produit et composition de limites, $u_{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes, alors elle ne converge pas.

Exercice 13. *Irrationalité de e.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Nous allons démontrer que e est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels $p, q \geqslant 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
   — Établir l'encadrement $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   — Vérifier que $q!u_q$ et $q!v_q$ sont deux nombres entiers consécutifs.
   — Conclure le raisonnement.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$
et
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \leq 0 \text{ car } 2 \leq n+1,$$
donc la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{!n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Ainsi, elles convergent vers la même limite.
2. — Puisque la suite (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$. Puisque la suite (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e < v_n$.
   — Puisque $q!u_q = \sum_{p=0}^{q} \frac{q!}{p!} = (p+1) \times \ldots \times q$, la quantité $q!u_q$ est donc un entier. De plus, $q!v_q = q!u_q + \frac{q!}{q!} = q!u_q + 1$, donc $q!v_q$ est un entier égal $q!u_q + 1$.
   — Puisque $u_q < e < v_q$, on a donc $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$, l'entier $(q-1)!p$ est donc compris strictement entre deux entiers consécutifs ce qui est impossible. Ainsi, e n'est pas rationnel.

<u>Exercice 14.</u>

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite des suites de terme général :
   a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ b) $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Solution :

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, définie sur $]-1, +\infty[$ et dérivable. On a d'une part $f(0) = 0$ et d'autre part pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+(1+x)(-1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$. La fonction f est croissante sur $[0, \infty[$ et donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$, c'est à dire que $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$. De même, on dérive $g(x) = \ln(x+1) - x$ pour obtenir $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$, et puisque $g(0) = 0$, par décroissance de g on a $\ln(x+1) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = e^{n\ln(1+1/n)}$ donc puisque la fonction exponentielle est croissante, on a
$$e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)} \leq u_n \leq e^{\frac{n}{n}}$$
c'est à dire
$$e^{1-\frac{1}{2n}} \leq u_n \leq e,$$
et donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.
   b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, et donc
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4}\right) \leq \ln(v_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$
par conséquent
$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \leq \ln(v_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$
On a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $\frac{n(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Ainsi la suite $(\ln(v_n))$ converge vers $\frac{1}{2}$ et donc par composition avec l'exponentielle, la suite (u_n) converge vers $e^{1/2}$.

Exercice 15. *Somme harmonique*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. Pour tout $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k} = \frac{1}{k}$.
2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 16. *Lemme de Cesàro.*

1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

   Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) converge également vers ℓ.
2. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. .
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

   Démontrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.
4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

   (*Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14*)

Solution :

1. On suppose d'abord que $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. De plus, la suite $\frac{1}{n}$ converge vers 0. Donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ et pour tout k tel que $1 \leq k \leq n_0$ on ait $\frac{|u_k - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{n_0}$. Ceci est possible parce qu'on a pris un nombre fini et fixé d'indices k (ou parce que la suite (u_n) converge et donc est bornée). Ainsi pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, on a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}(u_k - \ell)$$

et donc
$$|v_n - \ell| \leq \frac{n_0\varepsilon}{n_0} + \frac{n-n_0-1}{n}\varepsilon \leq 2\varepsilon.$$
Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
On suppose désormais que $l = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n > 2M + 2$. On sait ensuite que la suite (u_n) est minorée, puisqu'elle diverge vers $+\infty$, il existe donc $m \in \mathbb{R}$ minorant la suite (u_n) et donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$ et pour tout k tel que $1 \leq k \leq n_0$ on ait $\frac{u_k}{n} \geq \frac{m}{n} \geq -\frac{1}{n_0}$, puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi pour tout $n \neq \max\{n_1, n_2\}$, on a
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \geq \frac{-n_0}{n_0} + \frac{n-n_0-1}{n}(2M+2).$$
Puisque $\frac{n-n_0-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe un rang n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $\frac{n-n_0-1}{n} > \frac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, on a $v_n \geq M$, et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Si $\ell = -\infty$, alors $-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $-v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme on vient de le prouver, c'est à dire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

2. Utilisons la question précédente en introduisant les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = u_{n+1} - u_n$ et $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$. On a donc que $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ qui est une somme télescopique : en effet, on a
$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} - u_1.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{n}$. Or la suite $\left(\frac{u_0}{n}\right)$ est une suite qui converge vers 0, et donc la suite (b_n) a la même convergence que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{n}\right)$. D'après le lemme de Cesàro précédemment démontré, puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on sait que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Puisque $\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, par produit de limites la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)$ tend elle aussi vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, et donc la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ aussi.

3. On introduit cette fois $a_n = \ln(u_n)$, bien définie puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$ par composition des limites si $\ell \in \mathbb{R}$, et diverge vers $+\infty$ si $l = +\infty$. On peut donc appliquer la question précédente à la suite (a_n) : on sait alors que $\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$ si $\ell \in \mathbb{R}$, et vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n}\ln(u_n)} = e^{\frac{a_n}{n}}$, et par composition des limites, $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ln(\ell)} = \ell$ si $\ell \in \mathbb{R}$, et $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $\ell = +\infty$, ce qui conclut la preuve.

4. On pose $u_n = \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$
Donc d'après la question précédente, $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $v_n = \frac{n^n}{n!}$, et calculons :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$
d'après l'exercice 14. Ainsi, puisque $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{u_n}$, on sait d'après la question précédente que $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

Exercice 17. *Suites arithmético-géométriques.*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et soit $u^{(0)} \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). (*Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $a > 1$ et $a \leq -1$*).
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution :

1. L'équation $\alpha = a\alpha + b$ est équivalente à $\alpha(1 - a) = b$. Celle ci possède une solution, $\frac{b}{1-a}$ puisque $a \neq 1$.
2. Calculons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = av_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.
3. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n$ et donc $u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$.
4. La convergence dépend de la valeur de a, ainsi que du signe de $(u_0 - \alpha)$.
   — Si $u_0 = \alpha$, alors la suite est constante égale à u_0.
   — Si $u_0 \neq \alpha$, alors si $|a| < 1$ la suite converge vers α, si $a > 1$ alors la suite diverge vers l'infini du signe de $u_0 - \alpha$, et si $a \leq -1$ alors la suite n'a pas de limite.
5. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}[(u_0 - \alpha)a^k + \alpha] = (u_0 - \alpha)\sum_{k=0}^{n} a^k + \sum_{k=0^n} \alpha = (u_0 - \alpha)\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + (n + 1)\alpha.$$

Exercice 18.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
4. Montrer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
5. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante *(On pourra s'aider de la question 3.)* En déduire la nature de la suite (u_n). Même question si $u_0 \in]-\infty, 0[$.
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Solution :

1. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - 4x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -2x^2 + x = x(1-2x)$. Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = 2\ell(1-\ell)$ c'est à dire $\ell = f(\ell)$. D'après le tableau de signe, les points fixes de f sont 0 et 1/2. Si la suite démarre à un point fixe, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est constante.

4. On a déjà montré que f est strictement croissante sur ces deux intervalles. Il suffit donc de montrer que pour tout $x < 0, f(x) < 0$ pour montrer que $]-\infty, 0[$ est stable, et que $\forall x \in]0, 1/2[, f(x) \in]0, 1/2[$. Puisque $f(0) = 0$ et $f(1/2) = 1/2$, ceci est prouvé.

5. Montrons par récurrence que de façon générale si $u_0 \in I$ où I est un intervalle stable, alors $\forall n \in N, u_n \in I$ On note H_n : "$u_n \in I$. H_0 est vraie puisque $u_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons H_n. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_n \in I$ par hypothèse de récurrence, puisque I est stable on a donc $u_{n+1} \in I$ c'est à dire H_{n+1}, ce qui conclut la récurrence.

   Ainsi dans notre cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \in]0, 1/2[$, intervalle sur lequel $f(x) > x$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on a donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. Elle est également majorée puisque évolue dans l'intervalle $]0, 1/2[$. Ainsi elle converge, et donc d'après la question 3, elle converge vers 0 ou 1/2. Puisqu'elle est croissante et $u_0 > 0$, elle converge nécessairement vers 1/2.

   De même, si $u_0 \in]-\infty, 0[$, c'est un intervalle stable donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\infty, 0[$, intervalle sur lequel $f(x) < x$, donc (u_n) est décroissante. Si (u_n) était minorée, elle convergerait vers 0 ou 1/2, ce qui est impossible. Elle est donc décroissante et non minorée, c'est donc qu'elle diverge vers $-\infty$.

6. Cette fois ci, l'intervalle $]1/2, +\infty[$ n'est pas stable. Au contraire, si $u_0 \in]1/2, +\infty[$, alors d'après le tableau de variation déjà dressé, $u_1 \in]-\infty, 1/2[$, et l'on est ramené au cas précédent. Précisément, puisque $f(1) = 0$, alors si $u_0 \in]-1/2, 1[$, $u_1 \in]0, 1/2[$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1/2$, si $u_0 = 1$ alors $u_1 = 0$ et (u_n) est stationnaire à partir du rang 1, et si $u_0 > 1$, alors $u_1 \in]-\infty, 0[$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 19.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Répéter pour f l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 *(On pourra montrer que pour $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a $|f(x)| \leq |x|$).* Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
5. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Solution :

1. On pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ qui satisfait $f(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $f(x) < 0 \iff x \in]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et l'on a également $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Ainsi,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$. Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Enfin, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = f(\ell)$. D'après le tableau de signe, les points fixes de f sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Si la suite démarre à un point fixe, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est constante.

2. On a déjà démontré que f est décroissante dans cet intervalle. D'après le tableau de variation la fonction f y est donc stable si $[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ce qui est le cas puisque $2/3 \leq 1$.

3 et 4. Puisque $f(0) = 0$, on remarque plus précisément que $f([-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]) = [0, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ et $f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}] = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0]$. De fait $f \circ f([[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ et $f \circ f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}]) \subset [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, donc les deux intervalles sont stables pour $f \circ f$ qui satisfait à la fois $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_n)$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$.

Puisque $\sqrt{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, on sait donc que $f(x) - x$ est positif sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ et donc $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$ également sur ce même intervalle, et de même que $f(f(x)) - x$ est négatif sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$.

Ainsi si $u_0 \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, alors la suite (u_{2n}) évolue dans l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ et est donc suite décroissante minorée, donc convergente, et ce nécessairement vers 0. De plus la suite (u_{2n+1}) évolue dans l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$, c'est donc une suite croissante majorée, donc converge également vers 0, et de fait, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ les rôles de u_{2n} et u_{2n+1} sont inversés, mais la conclusion reste la même, les deux sous suites convergent vers 0, la suite (u_n) converge donc vers 0 pour tout $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

5. Si $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, d'après le tableau de signe alors $u_1 = f(u_0) > u_0$. Deux cas se produisent alors : soit $u_1 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, et l'on peut répéter le raisonnement pour u_1, soit $u_1 \notin]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ et alors d'après le tableau de variations de f, $u_1 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

   Deux occurrences surviennent donc : soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Dans ce cas, (u_n) serait une suite croissante majorée donc convergente, or elle ne pourrait converger que vers $-\sqrt{2}$, 0 ou $\sqrt{2}$, ce qui sont trois possibilités absurdes. Cette occurrence est donc impossible et nécessairement, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

6. (cf exercice précédent) Sur l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{2}[$ on a $f(x) < x$ et donc par récurrence, la suite (u_n) est décroissante. Puisqu'elle ne peut converger que vers des valeurs qui ne lui sont pas accessibles, c'est que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De même, sur l'intervalle $]\sqrt{2}, +\infty[$ on $f(x) > x$ et donc la suite (u_n) est croissante, et ne pouvant pas converger, c'est qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 20.

En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^2 + 1$, c) $f(x) = \sqrt{1+x}$,

d) $f(x) = 1 + \ln(x)$, e) $f(x) = e^x - 1$, f) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Pour certaines valeurs de u_0, la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Solution : Rédaction PARTIELLE s'appuyant sur les exercices précédents.

a) La fonction f a deux points fixes, 0 et 1. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $f(x) \leq x \iff x \in [0, 1]$. L'intervalle $[0, 1]$ est donc stabilisé. L'intervalle $[-1, 0]$ est envoyé dans l'intervalle $[0, 1]$, et l'intervalle $]-\infty, -1[$ est envoyé dans l'intervalle $[1, +\infty[$, qui lui aussi est stabilisé. De fait, si $|u_0 > 1|$ la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 et ne pouvant pas converger vers un point fixe de f tend donc vers $+\infty$. Si $u_0 = |1|$ alors la suite est stationnaire à partir du rang 1 donc converge vers 1. Enfin, si $|u_0| < 1$, la suite est décroissante à partir du rang 1 et est bornée donc converge vers 0 (puisque 1 n'est pas accessible).

b) Puisque l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et ne peux converger puisque f n'a pas de point fixe, donc diverge vers $+\infty$.

c) La fonction f est définie sur $I = [-1,,+\infty[$, donc on se restreint à $u_0 \in I$. L'équation $f(x) = x$ a une unique solution, qui est $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Puisque f est croissante sur I, f stabilise les deux intervalles $[-1,\varphi]$ et $[\varphi,+\infty[$,. Dans l'intervalle $[-1,\varphi]$, $f(x) \geq x$, et dans l'intervalle $[\varphi,+\infty[$,, $f(x) \leq x$. Ainsi si $u_0 \in [\varphi,+\infty[$ la suite est décroissante et minorée donc converge vers le point fixe φ. Si $u_0 \in [-1,\varphi]$ alors la suite est croissante et majorée donc converge vers le point fixe φ. Ainsi quel que soit $u_0 \in I$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

d) Puisque f est définie sur $I =]0,+\infty[$, on se restreint à $u_0 \in I$. L'équation $f(x) = x$ a une unique solution, qui est 1. Puisque f est croissante, l'intervalle $[1,+\infty[$ est donc stabilisé. Sur I entier on a $f(x) \leq x$ donc la suite (u_n) est toujours décroissante. Ainsi si $u_0 \in [1,+\infty[$, elle converge vers 1. En revanche, si $u_0 < 1$, alors la suite étant décroissante et ne pouvant pas converger, il existe un rang n tel que $u_n < e^{-1}$, et alors $u_{n+1} < 0$ et donc la suite n'est plus définie à partir de ce rang.

e) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus l'équation $f(x) = x$ a une unique solution, 0. Les intervalles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont donc stabilisés. De plus, sur $\mathbb{R}_-$ on a $f(x) \geq x$, et sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x$ également. Donc la suite (u_n) est toujours croissante. Ainsi si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et si $u_0 > 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

f) La fonction f a deux points fixes, $-1-\sqrt{2}$et $-1+\sqrt{2}$. Dressons le tableau de variation de $x \mapsto f(x) - x$:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-2	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)-x$	$+\infty$	0	$-\infty$ ‖ $+\infty$	0	$-\infty$

et celui de f :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-2	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$-1-\sqrt{2}$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$-1+\sqrt{2}$	0

On voit donc que l'intervalle $]-2,+\infty[$ est stabilisé. Or f y est décroissante, donc $f \circ f$ stabilise les intervalles $]-2,-1+\sqrt{2}]$ et $[-1+\sqrt{2},+\infty[$. Sur ces intervalles, $f \circ f$ est croissante et donc l'étude de $f(x) - x$ nous donne que si $u_0 \in]-2,+\infty[$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, celle évoluant dans l'intervalle $]-2,-1+\sqrt{2}]$ est croissante, et l'autre est décroissante. Donc les deux convergent vers $-1+\sqrt{2}$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1+\sqrt{2}$.
Le comportement de la suite pour $u_0 < -2$ est très long à étudier !

Exercice 21.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5]$, $x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   b) Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $|\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$.

3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
    a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
    b) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Solution :

1. Pour tout $x \in [3,5]$, on a $3 \leq x \leq 5$ donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ et ainsi $3 + \frac{4}{5} \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 3 + \frac{4}{3}$. Puisque $3 \leq 3 + \frac{4}{5}$ et $3 + \frac{4}{3} \leq 5$, a on bien $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. a) On résout pour $x \in [3,5]$,
$$\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 3 + \frac{4}{x} = x \Longleftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \Longleftrightarrow x = 4.$$
    b) Calculons pour $x \in [3,5]$, $|\varphi(x) - 4| = \left|3 + \frac{4}{x} - 4\right| = \left|\frac{4-x}{x}\right| \leq \frac{|x-4|}{3} \leq \frac{|x-4|}{2}$ car $x \geq 3$.
3. a) En appliquant la question précédente à u_n, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2}|u_n - 4|$. Ainsi la suite $v_n = |u_n - 4|$ vérifie $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$. Par une récurrence immédiate, ceci donne que $v_n \leq v_1 \frac{1}{2^{n-1}}$. Puisque $v_n \geq 0$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.
    b) On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_N - 4| \leq 10^{-6}$, c'est à dire $v_n \leq 10^{-6}$, c'est à dire $v_1 2^{-N+1} \leq 10^{-6}$. Or $u_1 = 5$ donc $v_1 = 1$ et donc en appliquant le logarithme, $(-N+1)\ln(2) \leq -6\ln(10)$, c'est à dire $N \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} + 1$. N'importe quel entier supérieur à ce nombre convient, et par exemple 21 convient.

__**Exercice 22.**__ *Calcul approché de* $\sqrt{a}$.

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
4. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n}$.

Solution :

1. En raison du terme $\frac{1}{x}$, l'ensemble de définition de φ est $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable sur cet ensemble et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$. On résout $\phi'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = a \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$, et $\phi'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[\setminus\{0\}$. Après le calcul des limites, on a donc

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{a}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On remarque tout d'abord que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > 0$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ensuite, on remarque que l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable puisque $\varphi([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$. Enfin, $\varphi(]0, \sqrt{a}[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, et donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$. Or $\varphi(x) - x = \frac{a-x^2}{2x}$ et donc sur l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$, on a $\varphi(x) - x \leq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Elle est donc décroissante et minorée, donc converge vers un point fixe de f. D'après le tableau de variation f a deux points fixes, $\pm\sqrt{a}$. Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2.$$
Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0^{2^n}$. Notons que $|v_0| < 1$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Si $u_0 > \sqrt{a}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{a}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{v_0^{2^n}} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{v_n} = u_n + \sqrt{a} \leq u_0 + \sqrt{a} \leq 2u_0$$
puisque la suite (u_n) est décroissante, et $u_0 > \sqrt{a}$.
On a donc montré que $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_0^{2^n}$.

Exercice 23.

Montrer que :
$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Solution : Notons $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$ et $b = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$.

Analyse (non nécessaire ici) : Admettons que ces expressions aient un sens. Alors $a^2 = a+1$, et $1+\frac{1}{b} = b$, ce qui donne puisque $b \neq 0$, que $b^2 = b+1$. Résolvons l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On calcule $\Delta = 1+4 = 5$, donc cette équation a deux solutions réelles qui sont $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, donc si a et b existent, alors $a = b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Synthèse : Prouvons désormais que a et b ont bien un sens. On définit les suites par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{R}_+$ est stable. De plus, sur cet intervalle, $f(x) - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \varphi$, et puisque φ est un point fixe de f, alors $[1, \varphi]$ est stable par f donc la suite (u_n) est croissante et majorée et converge vers un point fixe de f dans cet intervalle, à savoir φ. Donc $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et l'on vient de remontrer que $a = \varphi$.
On montre pour g que $g \circ g$ est une fonction qui stabilise les intervalles $[0, \varphi[$ et $]\varphi, +\infty[$, et telle que $g \circ g(x) - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \phi$. Par conséquent, les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et majorée, l'autre décroissante et minorée. Elles convergent donc chacune vers un point fixe de $g \circ g$, qui ne peut être que φ. Ainsi, $b = \lim_{n\to+\infty} v_n = \varphi$.

Exercice 24. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = -\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) < 0$, et donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1]$. Donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) = -a_{n+1}x^{n+1} \leq 0$. Donc $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$. De plus, f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc $f_n(x_{n+1}) \leq 0 = f_n(x_n) \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est donc décroissante.
3. Cette suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Exercice 25.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Solution :

1. Posons $f(x) = x + \tan x$ pour tout $x \in I =]-\pi/2, \pi/2[$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 2 + \tan^2(x)$. Puisque $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I et que $f(x) \underset{x\to-\pi/2}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\pi/2}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to\pi/2}{\longrightarrow} +\infty$ par somme de limites, f réalise donc une bijection de I dans $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout entier naturel n, l'équation $E_n : f(x) = n$ admet une unique solution.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$. Puisque f est croissante, c'est que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi la suite (x_n) est croissante, et majorée puisque évoluant dans l'intervalle I. Par conséquent, elle converge vers $\ell \in [-\pi/2, \pi/2]$. Or si $\ell \in]-\pi/2, \pi/2[$, par continuité de la fonction f, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est donc que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi/2$.

Exercice 26.

Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n ;

— la fonction f_n est strictement croissante sur I ;

— pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\in N}$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$.

Solution :

2. Montrons que la suite (x_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'une part que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. De plus, $f_n(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$, par hypothèse, donc $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$. Puisque f_n est strictement croissante sur I, c'est donc que $x_{n+1} \leq x_n$. Donc la suite (x_n) est décroissante.
3. On pose donc $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$, pour tout $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est une fonction dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(1 + n\ln(x))$. En particulier, cette quantité est du signe de $1 + n\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $1 + n\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{-1}{n} \longleftrightarrow x \geq e^{-1/n}$ car la fonction exponentielle est croissante. On cherche un intervalle I sur lequel toutes les fonctions f_n sont strictement croissantes. Puisque $e^{-1/n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'intervalle $I = [1, +\infty[$ convient. De plus, $f_n(1) = -1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $]-1, +\infty[$ et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $I = [1, +\infty[$.

   De plus, sur cet intervalle, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}\ln(x) - 1 - x^n \ln(x) + 1 = x^{n-1}\ln(x)(x-1) \geq 0$, donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout $x \in I$. D'après la question 2, on sait alors que la suite (x_n) des solutions de $f_n(x) = 0$ existe et est décroissante. De plus, puisque I est minoré, elle est convergente.

Exercice 27.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de la suite (x_n).

Solution : On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) > 0$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Ainsi pour tout $b \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[0, +\infty[$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Puisque f est croissante, c'est que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi la suite (x_n) est croissante. Ainsi soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$, soit elle diverge vers $+\infty$. Or si $\ell \in \mathbb{R}_+$, par continuité de la fonction f, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est donc que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.