Feuille d'exercices n° 4

Logique et raisonnement

Exercice 1.

1.**Vrai-faux.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair).
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, ((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$.
5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$. Donc pour tout réel x, $x - 1 < 0$.

2. **Analyse-synthèse.**

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Solution :

1.**Vrai-faux.**

1. $(6 < \frac{25}{4})$ et $(\sqrt{6} < \frac{5}{2})$ sont des assertions logiques ayant la valeur **Vrai**.
   Or **Vrai** $\Rightarrow$ **Vrai** est vraie.
   Donc $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$ est vraie.
2. On sait que **Faux** $\Rightarrow$ **Vrai** est vraie. Donc l'assertion est vraie.
3. On sait que **Faux** $\Rightarrow$ **Faux** est vraie. Donc l'assertion est vraie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$ est vraie alors $x-1 < 0$ est vraie donc l'implication est vraie. Si $x \leq 0$ est fausse alors l'assertion est vraie quelle que soit la valeur logique de $(x-1 < 0)$ car **Faux** $\Rightarrow$ **Vrai** est vraie et **Faux** $\Rightarrow$ **Faux** également. Finalement l'assertion est bien vraie universellement.
5. L'assertion est vraie. Vérifions pourquoi. Il existe existe des réels strictement positifs, et par conséquent le premier énoncé est faux. Le deuxième énoncé est aussi faux. Comme le deuxième énoncé est aussi faux et que **Faux** $\Rightarrow$ **Faux** est une implication vraie, on conclut que l'assertion est vraie.

2. **Analyse-synthèse.**

1. Analyse : On voit d'abord que $x(x-3)$ n'est positif que si $x \leq 0$ ou $x \geq 3$. De plus $3x - 5$ n'est positif que si $x \geq 5/3$. Par conséquent l'équation n'a de sens que pour $x \geq 3$.
   Procédons maintenant à l'analyse :
   Soit $x \in [3, +\infty[$ tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$. En élevant au carré on a $x(x-3) = 3x - 5$.
   Par conséquent $x^2 - 6x + 5 = 0$. On résout cette équation et on obtient $x = 1$ ou $x = 5$.
   Synthèse : 5 est bien solution mais pas 1.

2. Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. En prenant le logarithme de chaque côté, il vient : $x^x \ln(x) = x \ln(x^x) = x^2 \ln(x)$. Par conséquent $x = 1$ ou $x^x = x^2$. Donc $x = 1$ ou $x \ln(x) = 2 \ln(x)$. Par conséquent $x \in \{1, 2\}$.
Synthèse : 1 est solution et 2 est solution car $2^4 = 16 = 4^2$.

Exercice 2.

1. Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   (a) $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.
   (b) P et (non(Q) ou R).
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \Big((x \leq 0) \text{ et } \Big((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\Big)\Big)$.

Solution :

1.
   1. $[(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R] \equiv [non(P \text{ et } Q) \text{ ou } R]$. En appliquant la loi de De Morgan, on peut nier cette assertion et on obtient $[(P \text{ et } Q \text{ et } non(R))]$.
   2. On obtient $non(P)$ ou (Q et $non(R)$).
2.
   1. L'assertion est fausse, prendre $x = -1$ et $y = 1$ par exemple.
   2. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel x. On a donc soit $x \leq 0$ et $\sqrt{x^2} \neq -x$ soit $x \leq 0$ et $(x+1)^2 > x^2 + 1$.
   Supposons d'abord que $x \leq 0$ et $\sqrt{x^2} \neq -x$. Comme $x \leq 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc on a une absurdité.
   Supposons maintenant que $x \leq 0$ et $(x+1)^2 > x^2 + 1$. $(x+1)^2 - x^2 - 1 = 2x \leq 0$ donc on a une contradiction.

Exercice 3.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$
2. Montrer que, pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Solutions :

1. On sait que $(P \Rightarrow Q) \equiv (non(P) \text{ ou } Q)$. Par ailleurs $(non(Q) \Rightarrow non(P)) \equiv (non(non(Q)) \text{ ou } non(P)) \equiv (Q \text{ ou } non(P))$. Cela conclut.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $x \neq y$. Alors $[(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)] \Leftrightarrow (xy + y - x - 1 = xy + x - y - 1) \Leftrightarrow (y - x = x - y) \Leftrightarrow (x = y)$. Cela conclut.
3. Par contraposition : Soit $n \in \mathbb{N}$ pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n^2 = 4k^2$ est pair. Cela conclut.

Exercice 4.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,
$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)\,.$$
2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow ((x-1)(10 - x^2) \geq 0)$.
3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que
$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$
équivaut à
$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$
4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que sont équivalents :
   (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2\,;$
   (b) $x_0 - y_0 = 0\,;$
   (c) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0\,t + y_0\,(-t) \leq 0$.

Solutions :

1.
$$\begin{aligned}((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R) &\equiv non[(non(P) \text{ ou } Q) \text{ et } (non(Q) \text{ ou } R)] \text{ ou } (non(P) \text{ ou } R)\\ &\equiv (P \text{ et } non(Q)) \text{ ou } (Q \text{ et } non(R)) \text{ ou } (R \text{ ou } non(P))\end{aligned}$$
Si Q est vraie alors l'assertion obtenue est $(non(R)$ ou $non(P)$ ou $R)$ qui est vraie.
Si Q est fausse alors l'assertion obtenue est $(P$ ou $non(P)$ ou $R)$ qui est vraie également.
Cela conclut.
2.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. On trouve que les racines du polynôme sont 2 et 3. Donc $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \leq 0$. Le signe d'un trinôme à coefficient dominant positif est positif en dehors des racines et négatif à l'intérieur des racines. Par conséquent $2 \leq x \leq 3$.
   (b) Par la question précédente, $2 \leq x \leq 3$. Donc $x - 1 \geq 2 - 1 = 1$ et $10 - x^2 \geq 10 - 3^2 = 1$. Cela conclut.
3. La première implication est claire.
Prouvons l'implication réciproque :
$[(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ et $(R \Rightarrow P)]$ implique $[(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ et $(R \Rightarrow P)]$ et $[(Q \Rightarrow P)$ et $(R \Rightarrow Q)$ et $(P \Rightarrow R)]$ en utilisant la question 1. Cela conclut en utilisant le fait que $[A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A] \equiv [A \Leftrightarrow B]$.
4. On va utiliser la question 3.

— Supposons d'abord que (a) est vraie. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_0^2 + y_0^2 \leq t^2 - 2x_0t + x_0^2 + t^2 + 2y_0t + y_0^2$.
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 \geq t(x_0 - y_0)$.
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $t \geq (x_0 - y_0)$. En faisant tendre t vers 0, on obtient que $0 \geq x_0 - y_0$.
En considérant $t \in \mathbb{R}^{-*}$, on obtient l'inégalité $0 \leq x_0 - y_0$. Donc (b) est vraie.

— Supposons é présent que (b) est vraie.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_0 t - y_0 t = 0 \leq 0$. Donc (c) est vraie.

— Supposons que (c) est vraie. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2 = 2t^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2(y_0 - x_0)t \geq x_0^2 + y_0^2$. Donc (a) est vraie.

Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et non}(Q))\,.$$
2. Montrer que, pour tout réel x, $\left(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0\right) \Rightarrow \left(-x^4 + x^3 - 9 < 0\right)$.
3. Soit $\mathcal{P} = \{2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1;\ k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Solutions :

1.

P	Q	non(Q)	P et non(Q)	non(P et non(Q))	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0$. Supposons par l'absurde que $-x^4 + x^3 - 9 \geq 0$. On constate que $-x^4 + x^3 + x - 11 = (-x^4 + x^3 - 9) + (x - 2)$. Alors forcément, $x - 2 \leq 0$, ou encore $x \leq 2$. Il en découle que $-x^4 + x^3 - 9 \leq -x^4 + 8 - 9 \leq -x^4 - 1 < 0$. Or ceci est absurde puisque nous avons supposé que $-x^4 + x^3 - 9 \geq 0$.
3. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n qui soit à la fois pair et impair.
Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Donc $1 = 2(k - p)$ donc $1/2$ est un nombre entier. Cela est absurde.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions P, Q et R,
$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R)\,.$$
2. Montrer que, pour tout réel x, $\left(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\right) \Rightarrow \left((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1)\right)$.

Solutions :

1. D'une part $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow non(P)$ ou Q ou R.
D'autre part $((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R) \Leftrightarrow non\,(P \text{ et } non(Q))$ ou $R \Leftrightarrow (non(P)$ ou Q ou $R)$. Cela conclut.
2. On va appliquer la proposition précédente avec $P = \left(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\right)$, $Q = (x \leq -1)$ et $R = (x^4 > 1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 + x^2 - x - 1 > 0$ et $x > -1$. Alors $x^2(x+1) > x + 1$ et $x + 1 > 0$. Par conséquent, $x^2 > 1$. Donc $x^4 > 1$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3)).$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Solutions :

1. $(x \neq 2)$ ou $((x + y \neq 5)$ et $(y < 3))$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \eta)$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Exercice 8. Examiner la véracité des propositions qui suivent.
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$. 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\forall x \in I,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq I$.
5. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq I$.
6. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ \left(x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$. 7. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2,\ \left(x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$.

Solutions :

1. Cette assertion est vraie. En effet :
   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0, x \leq \varepsilon$. Supposons par l'absurde $x > 0$. Alors en prenant $\varepsilon = x/2$, on obtient que $x \leq x/2$ et donc $x/2 \leq 0$. Cela est absurde.
2. Cette assertion est fausse. Prendre $x = 1$ et $\varepsilon = 2$ donne un contre-exemple.
3. Cette assertion est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre comme en 1. que $x \leq 0$. On peut également appliquer la méme preuve é $-x$ et on obtient alors que $-x \leq 0$ et donc que $x \geq 0$. Finalement $x = 0$.
4. Cette assertion est vraie. Considérons un intervalle ouvert I de la forme $I =]a, b[$ avec $a < b$. Soit $x \in I$. Par définition $a < x < b$. On pose $\varepsilon = \min\left(\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right)$. On note que $x - \varepsilon \geq x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > a$. De méme $x + \varepsilon < b$. Par conséquent $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
5. Cette assertion est fausse. On peut prendre $I =]0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geq 1$, $]1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon[$ n'est pas contenu dans I. Si $\varepsilon < 1$, alors en prenant $x = \varepsilon/2$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ n'est pas contenu dans I. On a donc bien prouvé la négation de notre assertion.
6. Cette assertion est fausse. Prendre $x = -1$ et $y = 1$ fournit un contre-exemple.
7. Cette assertion est vraie car $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 9.

1. Écrire l'énoncé qui traduit "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante".
2. Cet énoncé est-il équivalent à "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante" ?

Solutions :

1. "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante" se traduit par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m$. En niant cette assertion on obtient que "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante" se traduit par $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$, tels que $n \leq m$ et $u_n > u_m$.
2. Cela n'est pas équivalent é l'énoncé "la suite est décroissante". En effet la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_n = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas croissante mais n'est pas décroissante non plus.

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $x_i = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x$.

Montrer qu'il existe $i \in [[1, n]]$, tel que $x_i \leq \dfrac{x}{n}$.

Solutions :

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $i_0 \in [[1, n]]$, tel que $x_{i_0} > 0$. Alors comme $x_i \geq 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$, il vient que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq x_{i_0} > 0$. Cela est en contradiction avec l'hypothèse $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.
2. Supposons par l'absurde que pour tout $i \in [[1, n]]$, $x_i > \frac{x}{n}$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} = x$. Cela est absurde.

Exercice 11. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$.
3. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$.
4. $\ldots\ x \in \mathbb{N},\ x \leq \pi$.
5. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$.
6. $\ldots\ x \in \emptyset,\ 2 = 3$.

Solutions :

1. $\forall$ convient.
2. $\exists$ convient car le discriminant du polynôme est strictement positif mais pas $\forall$.
3. $\exists$ convient mais pas $\forall$.
4. $\exists$ convient mais pas $\forall$.
5. Aucun des deux symboles logiques ne convient car le discriminant du polynôme est négatif.
6. $\forall$ convient car toute assertion est vraie sur l'ensemble vide. Par contre $\exists$ ne convient pas car l'ensemble vide ne contient aucun élément.

Exercice 12. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. 2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. 3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y > x^2$. 5. $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2\ ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$. 6. $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$.

Solutions :

1. **Vrai**
2. **Faux**, $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 7$.
3. **Vrai**
4. **Faux**, $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y \leq x^2$.
5. **Faux**, $\exists x, y \in \mathbb{Z}, (x \leq y$ et $x^2 > y^2)$ ou $(x > y$ et $x^2 \leq y^2)$.
6. **Faux**, prendre $(x, y) = (-3, -2)$ par exemple, $\exists x, y \in \mathbb{Z}, xy \leq x^2$ et $y > x$.

Exercice 13. On note $A = [0, 1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.
1. $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ (x + y) \in A$. 2. $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ (x + y) \in A$. 3. $\exists x \in A,\ \forall y \in A,\ (x + y) \in A$.

Solutions :

1. **Faux**. En effet, $1 + 1 = 2 \notin A$
2. **Vrai**. Soit $x \in A$. On note que $x + 0 \in A$ et $0 \in A$. Cela conclut.
3. **Vrai**. $x = 0$ vérifie cette propriété.

Exercice 14. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}_+,\ \forall z \in \mathbb{R}_+,\ ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.
L'écrire en franéais puis décider sa véracité.

Solutions : Pour tout réel x, il existe un réel positif y tel que pour tout réel positif z, si z est plus petit que y alors z^2 est plus petit que x^2.
Cette assertion est vraie. Prouvons le :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = |x| \in \mathbb{R}^+$.
Soit $z \in \mathbb{R}^+$ tel que $z \leq y$. On sait que $0 \leq z \leq |x|$ donc $z^2 \leq x^2$.
Par conséquent, $\forall z \in \mathbb{R}_+,\ ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.

Exercice 15. Donner une preuve directe ainsi qu'une preuve par récurrence des faits suivants :

1. La somme $1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Solutions :
Prouvons d'abord les deux résultats par des preuves directes :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On note par télescopage que $(n+1)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) = n + 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
   On en déduit en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 10^k = \frac{10^n - 1}{10 - 1}$. Donc $10^n - 1 = 9 \times \sum\limits_{k=0}^{n-1} 10^k$.

Prouvons à présent les deux résultats par récurrence :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = " \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}"$.
   -Initialisation : la propriété est vraie au rang 1 car on a bien $1 = \frac{1\times 2}{2}$.

   -Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
   Par hypothèse de récurrence, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
   Donc H_{n+1} est vraie.
   Le principe de récurrence conclut.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n =$ "$10^n - 1$ est divisible par 9".
   -Initialisation. $10^1 - 1 = 9$ est divisible par 9 donc H_1 est vraie.

   -Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie.
   $10^{n+1} - 1 = 10 \times (10^n - 1 + 1) - 1 = 10 \times (10^n - 1) + 9$.
   Or en utilisant H_n, $10^n - 1$ est divisible par 9. On en déduit immédiatement que $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9 et donc que H_{n+1} est vraie.
   Le principe de récurrence permet de conclure.

Exercice 16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin\alpha|$. *Indication : utiliser la formule* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Solutions :

On va procéder par récurrence :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = "|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|"$.
-Initialisation : H_0 est vraie car on a alors 0 des deux cotés de l'inégalité. On remarquera que l'inégalité est également tautologique pour $n = 1$.

-Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie.
$|\sin((n+1)\alpha)| = |\sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(n\alpha)| \leq |\sin(n\alpha)| \times |\cos(\alpha)| + \sin(\alpha)| \times |\cos(n\alpha)|$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leq 1$.
Par conséquent, $|\sin((n+1)\alpha)| \leq |\sin(n\alpha)| + |\sin(\alpha)|$.
En utilisant H_n, il vient que $|\sin((n+1)\alpha)| \leq (n+1)|\sin(\alpha)|$. Donc H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence permet de conclure.

Exercice 17.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: si $n = 0$ alors $u_n = 1$, si $n > 0$ alors $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

2. Montrer que tout nombre naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

Solutions :

Chacun des énoncés sera démontré en utilisant la récurrence forte. Pour le premier, on procède comme suit :

On fixe $n = 0$ pour l'initialisation. Alors $u_0 = 1 = 2^0$. Pour l'hérédité, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on admet que pour tout $i < n$, $u_i \leq 2^i$. Par la définition de la suite (u_n), $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ par la formule des sommes géométriques. Il en découle que $u_n \leq 2^n$.
Pour le deuxième énoncé, on procède comme suit. Pour l'étape d'initialisation, on vérifie que l'énoncé est vrai pour 2. Ceci est évident puisque 2 divise 2. Pour l'hérédité, on fixe $n \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à 2 est on admet que pour tout $2 \leq i < n$, la propriété est vraie. L'objectif est de démontrer qu'il en est de même pour n. Il y a deux possibilités. Soit n est premier, dans lequel cas il est son propre diviseur, soit il existe n_1 et n_2 deux nombres naturels appartenant à $[\![2, n-1]\!]$ tels que $n = n_1 n_2$. L'hypothèse de récurrence forte s'applique alors à n_1 et n_2, et ceux-ci sont divisibles par des nombres premiers. Bien sûr, leurs diviseurs divisent n aussi.

Exercice 18. Trouver une faute dans le raisonnement :

> On “montre” par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec $n = 0$. Hérédité : les deux suites sont solution de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Solutions :
Ici, on voudrait faire une récurrence d'ordre 2. Or ce type de récurrence nécessite de vérifier l'initialisation pour les deux premiers rangs de la récurrence. Or ici le rang 0 est vérifié mais le rang 1 est faux.

Exercice 19.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, puis montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis montrer que $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2,\ x^y \notin \mathbb{Q}$.

Solutions :

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $2q^2 = p^2$. Donc p^2 est pair. Donc p est pair. Donc il existe r un entier tel que $p = 2r$. Donc $2q^2 = 4r^2$. Donc $q^2 = 2r^2$.
   Donc q est également pair. Donc 2 est un diviseur commun é p et q. Cela est absurde car p et q sont premiers entre eux.
2. $$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}))^{\sqrt{2}} \\ &= \exp(\sqrt{2}\ln(2)/2)^{\sqrt{2}} \\ &= \exp(\ln(2)) \\ &= 2\end{aligned}$$
   A présent nous avons deux possibilités :
   - Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ et donc nous avons trouvé un exemple adéquat.
   - Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ et le fait que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ nous fournit également un exemple adéquat.
3. Si $\sqrt{2} + 1$ était rationnel alors $\sqrt{2}$ serait rationnel ce qui n'est pas d'aprés la question 1.
   D'aprés la question précédente, il existe $x \notin \mathbb{Q}$ tel que $x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Par conséquent $x^{1+\sqrt{2}} = x^{\sqrt{2}} \times x$ qui n'est donc pas dans $\mathbb{Q}$. Cela conclut.

Exercice 20.

1. Soient x et y deux réels distincts de 1. Montrer que si $x \neq y$, alors $\dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{y-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Solutions :

1. On va procéder par contraposition. Supposons que $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$ alors en prenant l'inverse $x-1 = y-1$ et donc $x = y$.
2. Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers soit fini. Notons alors $\{p_1, \cdots, p_n\}$ l'ensemble des nombre premiers.
   On pose alors $x = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1$.
   On sait que x est forcément divisible par un nombre premier p_i car tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier. Donc $p_i | 1$. Cela est absurde.