Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2023-2024

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 3

FONCTIONS USUELLES

---

1 Logarithme

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$

b) $\log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x + 1) = \log_{10}(x - 1)$

Solutions :

a) On remarque d'abord que l'équation n'a de sens que si $x > 1$.
Soit $x \in]1, +\infty[$. En passant à l'exponentielle, on obtient que $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$.
Or on sait que l'équation $2x^2 - 2x - 1 = 0$ a pour solutions $\frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. En faisant l'intersection avec le domaine de validité de l'équation, à savoir $]1, +\infty[$, on déduit que l'unique solution de l'équation est $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

b) En faisant de même que ci-dessus, on trouve que l'unique solution de l'équation est $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Exercice 2. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

Solutions :
$\log_{10}\left(2^{43112609}\right) = 43112609 \times \log_{10}(2)$ a 12978188 comme partie entière inférieure. Il s'agit du nombre de chiffres en base 10.

Exercice 3. Y a-t-il un point du graphe du logarithme népérien tel que la tangente au graphe en ce point passe par l'origine ?

Solutions : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que la tangente au graphe du logarithme népérien en x_0 passe par l'origine. La tangente au graphe du logarithme népérien en x_0 est donnée par $x \mapsto \ln(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0}$. Cette tangente passe par l'origine ssi $\ln(x_0) - \frac{x_0}{x_0} = 0$ ssi $x_0 = e$. Donc seul le point $(e, 1)$ vérifie la condition requise.

Exercice 4. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

Solutions :
On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2/2$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$. Donc f est croissante. Or $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$.
L'autre inégalité se montre de la même façon.

Exercice 5. Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Solutions :
Supposons par l'absurde qu'il existe p et q deux entiers tels que $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$. Alors $2^q = 10^p = 2^p \times 5^p$.
L'unicité de la décomposition en facteurs premiers nous donne que $q = p$ et $p = 0$. Cela est absurde.

Exercice 6. Montrer que l'équation
$$\ln(1+|x|) = \frac{1}{x-1}$$
possède exactement une solution $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Solutions :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+|x|) \geq \ln(1) = 0$. Or $\frac{1}{x-1}$ est négatif tant que $x > 1$. Donc l'équation n'a aucune solution sur $]-\infty, 1[$.
On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]1, +\infty[$.
Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. De plus les limites de f en 1^+ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$.
Par conséquent le théorème de la bijection nous dit qu'il existe une unique α solution de l'équation dans $]1, +\infty[$. De plus $f(2) = \ln(3) - 1 > 0$ donc on sait en plus que $\alpha < 2$.

Exercice 7. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

Solutions : On pose $f : x \mapsto \ln(2)x - 2\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \ln(2) - \frac{2}{x}$.
On en déduit aisément que f est strictement décroissante puis strictement croissante.
De plus $f(2) = 0$ et $f(4) = 0$. Donc f est positive sur $]0, 2]$, négative sur $[2, 4]$ et positive sur $[4, +\infty[$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n^2$ ssi $f(n) \geq 0$. Donc $2^n \geq n^2$ pour tout entier n différent de 3.

2 Exponentielle

Exercice 8. Etudier la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x - e^{-x}$ b) $g(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Solutions :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$. Donc f est impaire.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -g(x)$. Donc g est impaire.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{2x}\times e^{-x}}{e^{2x}\times(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = h(x)$. Donc h est paire.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ b) $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ c) $e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$

Solutions :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} - e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x$ est solution de l'équation $X^2 - X - 6$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $e^{2x} - e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3$ ou $e^x = -2 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow e^x$ est solution de l'équation $3X^2 - 20X - 7$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \Leftrightarrow e^x = 7$ ou $e^x = -1/3 \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln(7)$.

c) L'équation $e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de solution car une somme de nombres strictement positifs ne peut pas être nulle.

Exercice 10. Déterminer la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

a) $\ln(x) - e^x$ b) $\dfrac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$ c) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$

Solutions :

a) $\ln(x) - e^x = e^x(\frac{\ln(x)}{e^x} - 1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

b) $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{x^6}{\exp(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc par composition des limites $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c) $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{\sqrt{x}} = \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

d) $\frac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1} = \frac{\exp(\sqrt{x}-x^2)+\exp(-x^2)}{1+\exp(-x^2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0+0}{1+0} = 0$.

Exercice 11.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
2. On considére $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$.
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Rappel : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) En déduire que f atteint un maximum sur $\mathbb{R}$ puis le déterminer.

Solutions :

1. On pose $f : x \mapsto e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Par conséquent, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f(0) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x > x$.
2.
   (a) On note que $x \mapsto e^x$ est continue. En outre, $x \mapsto e^x - x$ est continue et ne s'annule pas. Donc, noté f qui est le quotient de ces deux fonctions est bien défini et continu.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$. On sait que $xe^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.
   Par ailleurs $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \frac{0}{0 - \infty} = 0$.
   (c) Un rapide calcul donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x		1	
$f'(x)$	$+$	|	-
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$ 1

   (d) On déduit du tableau de variations que f atteint un maximum en 1 et que ce maximum vaut $\frac{e}{e-1}$.

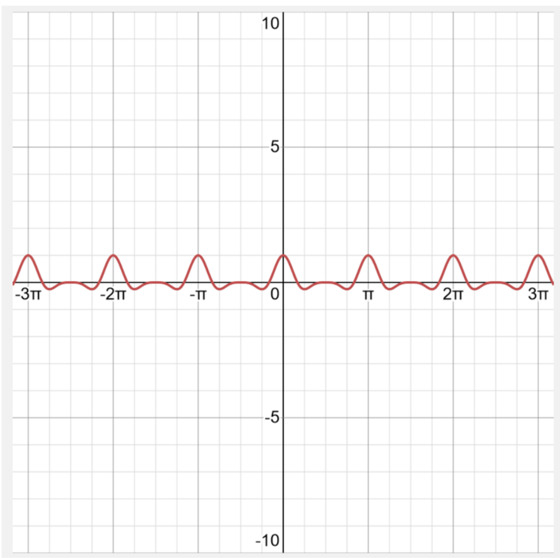
3 Fonctions trigonométriques

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Calculer f' et déduire le sens de variation de f sur I.
3. Tracer le graphe de f.

Solutions :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f(-x) = \cos(-3x)\cos^3(-x) = \cos(3x)\cos^3(x) = f(x)$. Donc f est paire.
   $f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\cos^3(x+\pi) = -\cos(3x)\times(-1)^3\times\cos^3(x) = f(x)$. Donc f est π périodique.
   Comme f est π périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, comme f est paire, on peut méme se contenter de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= -3\sin(3x)\cos^3(x) - 3\cos(3x)\sin(x)\cos(x)^2 \\ &= -3\cos^2(x)\left(\sin(3x)\cos(x) + \sin(x)\cos(3x)\right) \\ &= -3\cos^2(x)\sin(4x) \end{aligned}$$
   Donc f' est négative sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et positive sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
   On en déduit que f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
3. 

Exercice 13. Déterminer la valeur de

a) $\arcsin(-1/2)$ b) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ c) $\arctan(\sqrt{3})$

d) $\arccos(\cos(2\pi/3))$ e) $\arccos(\cos(-2\pi/3))$ f) $\arcsin(\sin(-\pi/3))$

g) $\arccos(\cos(4\pi/3))$.

Solutions :

a) $\arcsin(-1/2) = -\frac{\pi}{6}$ b) $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \frac{3\pi}{4}$ c) $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

d) $\arccos(\cos(2\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$ e) $\arccos(\cos(-2\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$ f) $\arcsin(\sin(-\pi/3)) = -\pi/3$

g) $\arccos(\cos(4\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 14. Donner le domaine de définition maximal des équations suivantes puis les résoudre :

a) $\sin^2(x) = 1$ b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ c) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$

Solutions :

a) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(x) = 1/2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

c) L'équation est définie sur $[-1, 1]$. Son unique solution est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

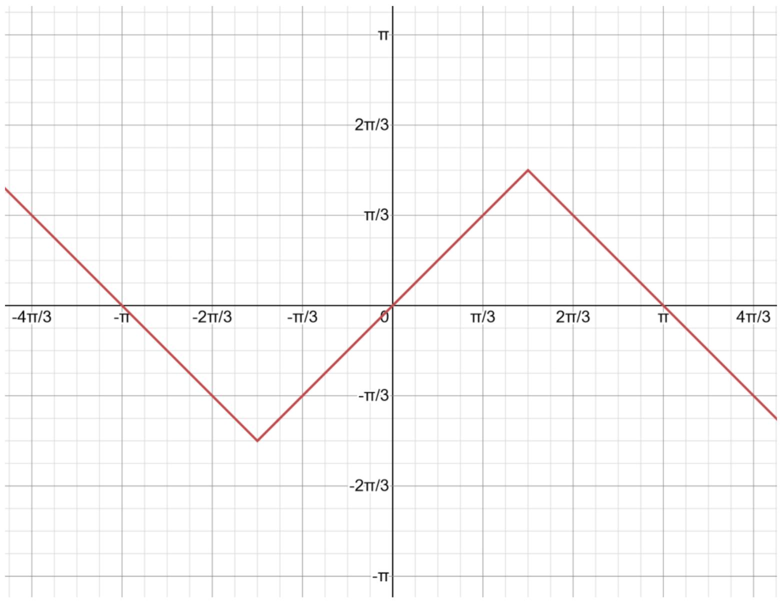
Exercice 15.

1. Tracer le graphe des fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\sin \circ \arcsin$.
2. Donner le domaine de définition maximal des expressions suivantes puis simplifier les :

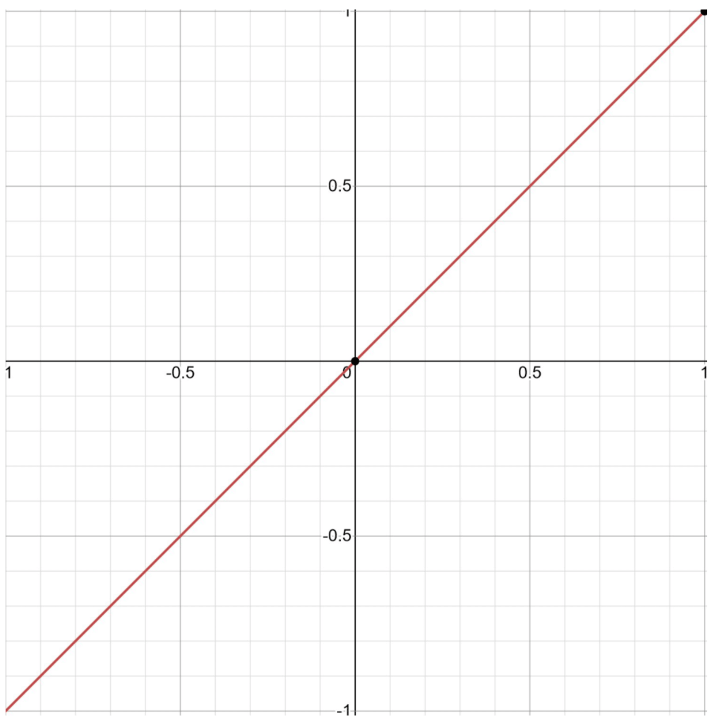
   a) $\tan(\arcsin x)$ b) $\sin(\arccos x)$ c) $\cos(\arctan x)$.

Solutions :

1.
   Voici $\arcsin \circ \sin$.



Voici $\sin \circ \arcsin$.



2.

a) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $[-1,1]$.
Pour tout $x \in [-1,1]$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $[-1,1]$.
Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

c) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \cos(\arctan(x))$. On remarque d'abord que $X > 0$.
De plus, $\frac{\sqrt{1-X^2}}{X} = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = \tan(\arctan(x)) = x$.
Donc $1 - X^2 = X^2x^2$. Donc $X = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Solutions :
On pose $f : x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$ définie sur $[0,1]$.
Pour tout $x \in [0,1[$, $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.
Donc f est constante sur $[0,1[$. Par continuité, elle est constante sur $[0,1]$. Or $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$. Cela conclut.

On peut aussi procéder par une méthode plus directe (mais un peu plus longue) pour aboutir à la même conclusion. On applique l'identité de somme pour la fonction cosinus : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos(x) + \arcsin(x)) &= \cos(\arccos(x))\cos(\arcsin(x)) - \sin(\arccos(x))\sin(\arcsin(x)) \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier que $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Or, la valeur de la somme $\arccos(x) + \arcsin(x)$ est contenue dans l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Sur cet intervalle, il existe trois valeurs de $\arccos(x) + \arcsin(x)$ telles que $\cos(\arccos(x) + \arcsin(x)) = 0$, à savoir $-\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$. Il reste à vérifier que la seule possibilité est $\pi/2$.

Exercice 17. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$
2. Déterminer la limite de la suite

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

Solutions :

1. On note que $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in]-\pi/2, \pi/2[$.

   Par conséquent, par une formule de trigonométrie usuelle pour tan :

   $$\begin{aligned}\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) &\Leftrightarrow \tan\left[\arctan(p+1) - \arctan(p)\right] = \tan\left[\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{p+1-p}{1+p(p+1)} = \frac{1}{p^2+p+1} \\ &\Leftrightarrow \textbf{Vrai}\end{aligned}$$

2. Par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$.

   Donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 18. Donner le domaine de définition maximal des fonctions suivantes. Puis, donner leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ b) $g(x) = \arcsin(\cos(x))$ c) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

Solutions :

a) arcsin est négative sur $[-1, 0]$ et positive sur $[0, 1]$. Donc f est définie maximalement sur $[0, 1]$.

   En 0, la racine carrée n'est pas dérivable en 0. De plus arcsin n'est pas dérivable en 1. On suspecte donc que le domaine de dérivabilité de f est $]0, 1[$. (Mais attention cela ne suffit pas comme argument ! Il existe des contre-exemples !)

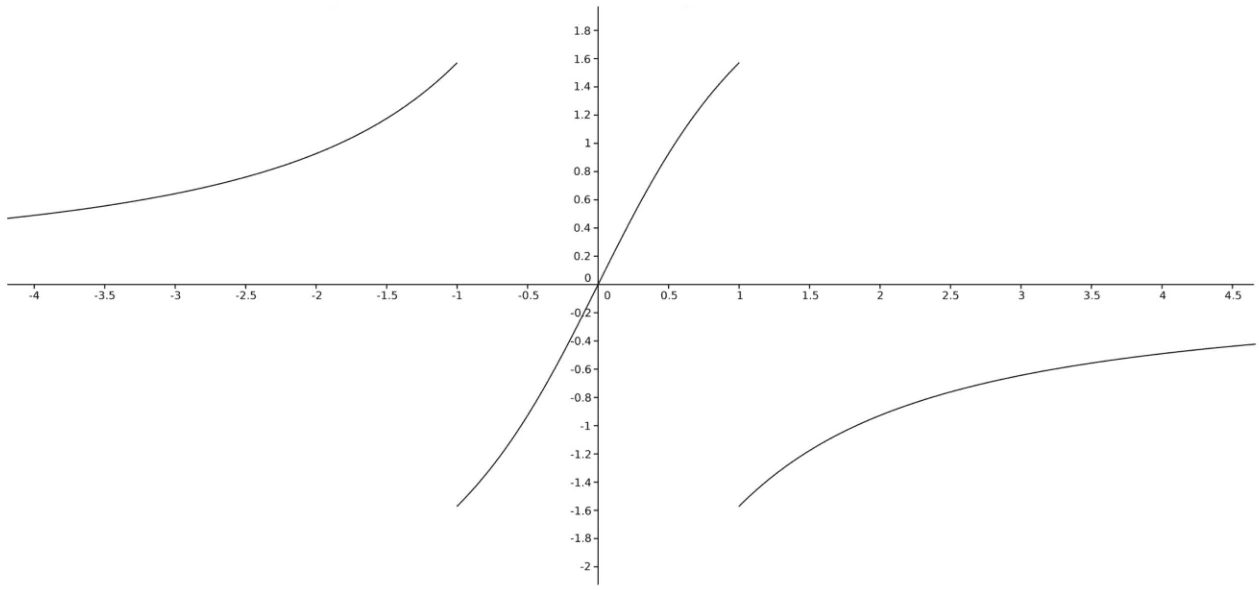
   Pour tout $x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)\times\arcsin(x)}}$.

   On voit que f' diverge en 0 et en 1, par conséquent $]0, 1[$ est bien le domaine de dérivabilité de f.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$.

   On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(x))$. Il s'agit donc d'une fonction dérivable partout sauf sur $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $g'(x) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}} = -sgn(\sin(x))$.

c) h est définie maximalement sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $h'(x) = \frac{2(1-x^2)+2x\times 2x}{(1-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\frac{(2x)^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2+4x^2} = \frac{2}{1+x^2}$.
On notera qu'on a ici une situation très particulière car même si h n'est pas définie en -1 et 1, h' l'est. En vérité h admet une limite à gauche et à droite en ces deux points et ses prolongements à gauche et à droite sont dérivables et les dérivées à gauche et à droite en ces points coincident ! Toutefois h n'est pas prolongeable par continuité ! Voici le graphe de h pour bien visualiser la chose :



4 Fonctions trigonométriques hyperboliques

<u>Exercice 19.</u> Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

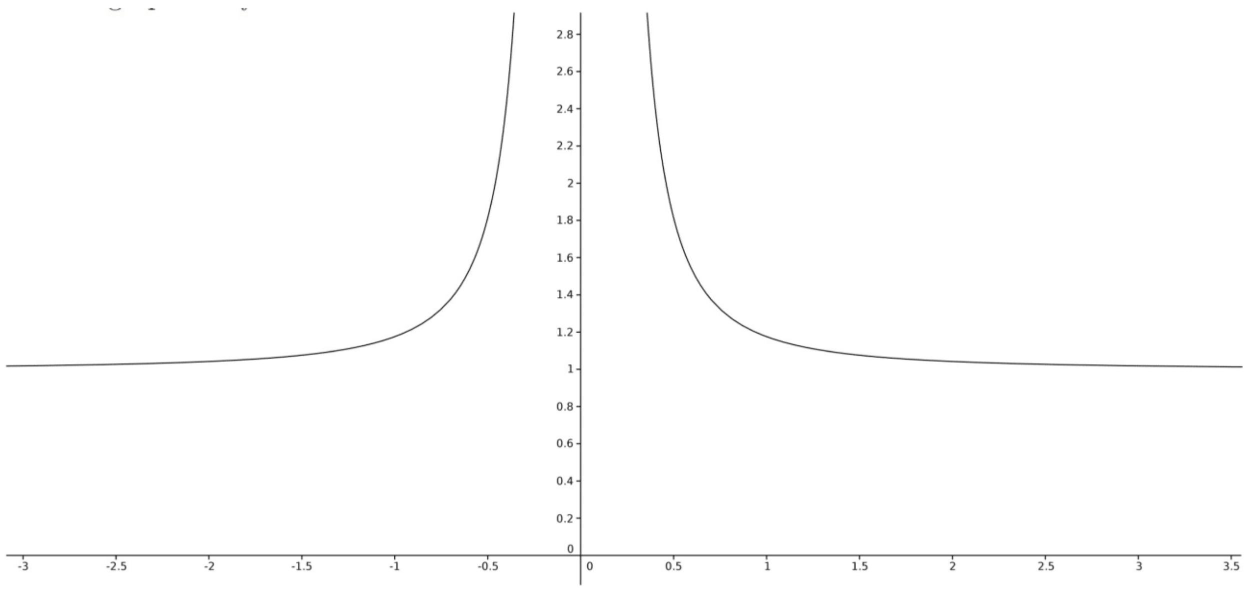
Solutions :
$$\begin{aligned}\cosh(x) = 2 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4\\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2 - 4X + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \in \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}\\ &\Leftrightarrow x \in \{\ln(2+\sqrt{3}), \ln(2-\sqrt{3})\}\end{aligned}$$

<u>Exercice 20.</u> On considére la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sinh(1/x)$.

1. Etudier la parité de f.
2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$ on a $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f et tracer son graphe.

Solutions :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x\sinh(-1/x) = x\sinh(1/x) = f(x)$. Cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Donc f est paire.
2. On note que $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donc par composition des limites, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. Par parité de f, il en va de méme en 0^-.
   De plus on remarque que $\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^x-1}{x} - \frac{(e^{-x}-1)}{x}\right] \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Donc par composition des limites, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Il en va de méme en $-\infty$ par parité.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \sinh(1/x) - \frac{\cosh(1/x)}{x}$.
4. On pose $\varphi : x \mapsto \tanh(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{\cosh(x)^2} - 1 \leq 0$. Donc φ décroît donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+, \tanh(y) - y = \varphi(y) \leq \varphi(0) = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \cosh(1/x)\,(\tanh(1/x) - 1/x) \leq 0$. Donc f croît sur $\mathbb{R}^{-*}$ et décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Voici le graphe de f :



Exercice 21. Déterminer les couples de réels (a, b) tels que le système suivant admette une solution :

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) &= a \\ \sinh(x) + \sinh(y) &= b \end{cases}$$

Solutions : On va procéder par analyse synthèse. Soit (a, b) un couple de réel tel que le système ci-dessus ait une solution (x, y). Alors en sommant et en soustrayant les deux équations, il vient :

$$\begin{cases} e^x + e^y &= a + b \\ e^{-x} + e^{-y} &= a - b \end{cases}$$

En particulier $a + b > 0$ et $a - b > 0$.
On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. On a alors :

$$\begin{cases} X + Y &= a + b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} &= a - b \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} X+Y &= a+b \\ XY &= \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Donc X et Y sont racines du polynôme $T^2-(a+b)T+\frac{a+b}{a-b}$. Par conséquent le discriminant de ce polynôme est positif. Donc $(a+b)^2-4(a+b)/(a-b)\geq 0$ c'est à dire, $a^2-b^2\geq 4$. Finalement on a les conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} a+b &> 0 \\ a-b &> 0 \\ a^2-b^2 &\geq 4 \end{cases}$$

Montrons réciproquement que ces conditions sont suffisantes.
Le polynôme $T^2-(a+b)T+\frac{a+b}{a-b}$ admet alors deux racines réelles X et Y. Par les relations coefficients-racines, elles vérifient les équations :

$$\begin{cases} X+Y &= a+b \\ XY &= \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Par ailleurs, notons que $T^2-(a+b)T+\frac{a+b}{a-b}$ n'admet que des racines strictement positives donc $X>0$ et $Y>0$ Donc on a de nouveau que :

$$\begin{cases} X+Y &= a+b \\ \frac{1}{X}+\frac{1}{Y} &= a-b \end{cases}$$

En posant $x=\ln(X)$ et $y=\ln(Y)$ on retrouve alors aisément l'équation voulue.

Exercice 22. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geq 1$ on a

$$\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n=\frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

Solutions :
Soit $x\in\mathbb{R}$. On va procéder par récurrence.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=$ " $\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n=\frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$ ".
-Initialisation : Le cas $n=1$ revient à écrire la même chose des deux côtés de l'équation.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie.
-Hérédité : Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^{n+1} &= \left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)\times\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n \\ &= \frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\times\frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)} \\ &= \frac{1+\tanh(x)+\tanh(nx)+\tanh(x)\tanh(nx)}{1-\tanh(x)-\tanh(nx)+\tanh(x)\tanh(nx)} \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned} \frac{1+\tanh((n+1)x)}{1-\tanh((n+1)x)} &= \frac{1+\frac{\tanh(x)+\tanh(nx)}{1+\tanh(nx)\tanh(x)}}{1-\frac{\tanh(x)+\tanh(nx)}{1+\tanh(nx)\tanh(x)}} \\ &= \frac{1+\tanh(x)+\tanh(nx)+\tanh(x)\tanh(nx)}{1-\tanh(x)-\tanh(nx)+\tanh(x)\tanh(nx)} \end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet de conclure.