

Feuille d'exercices n° 2

RÉCURRENCE, SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Solution : On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(P_n) : \quad u_n = 2n + \frac{1}{3^n}.$$

- Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = 2 \times 0 + \frac{1}{3^0}$. (P_0) est vrai.
- Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . Par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = 2(n + 1) + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

- Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture par récurrence.

Solution : On voit que

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} \dots$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(P_n) : \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

- Initialisation. Pour $n = 0$, c'est évident que (P_0) est vrai.
- Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . Par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} \sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

- Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 4u_n + 9.$$

1. Montrer qu'il existe λ dans \mathbb{R} tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite géométrique.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve : On voit que

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = 4u_n + 9 - \lambda = 4(u_n - \lambda) + 9 + 3\lambda = 4v_n + (9 + 3\lambda).$$

Pour que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite géométrique, il faut que $9 + 3\lambda = 0$. Autrement dit, si on prend $\lambda = -3$, alors $(v_n = u_n + 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$v_n = 4^n v_0, \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $v_0 = u_0 + 3 = 4$. On en déduit que

$$u_n = v_n - 3 = 4^{n+1} - 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. Calculer le terme général des suites définies par récurrences suivantes :

1. $u_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^3$;
2. $v_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n^3$.

Solution :

1. Par calcul, on voit que

$$u_0 = 2, u_1 = 2^3, u_2 = 2^{3^2}, u_3 = 2^{3^3}.$$

On va vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_n) : u_n = 2^{3^n}.$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, c'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . Par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = u_n^3 = (2^{3^n})^3 = 2^{3^n \times 3} = 2^{3^{n+1}}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{3^n}$.

2. On voit que $v_n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $w_n = \ln(v_n)$ et obtient que

$$w_{n+1} = 3w_n + \ln(2), \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $w_0 = \ln(3)$. Par la méthode de l'Ex 3, on voit que $(w_n + \frac{1}{2} \ln(2))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Donc, on a

$$w_n + \frac{1}{2} \ln(2) = 3^n (w_0 + \frac{1}{2} \ln(2)) = 3^n \ln(3\sqrt{2}).$$

Par conséquent,

$$v_n = e^{w_n} = e^{w_n + \frac{1}{2} \ln(2)} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2})^{3^n}}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{3^n-1}{2}} 3^{3^n}.$$

Exercice 5. Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Preuve :

1. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_n) : \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de 7.}$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7$. C'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 9 \times \underbrace{(3^{2n+1} + 2^{n+2})}_{\text{multiple de 7}} - 7 \times 2^{n+2},$$

qui est un multiple de 7. Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

2. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \quad 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ est un multiple de 11.}$$

— Initialisation. Pour $n = 1$, $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 9 \times 3^{2n} + 64 \times 2^{6n-5} = 9 \times \underbrace{(3^{2n} + 2^{6n-5})}_{\text{multiple de 11}} + 55 \times 2^{6n-5},$$

qui est un multiple de 11. Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 6. Écrire à l'aide du symbole \sum les expressions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15}$ | 2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$ |
| 3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$ | 4. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$ |

Solution :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15} = \sum_{n=4}^{15} 3^n.$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024} = \sum_{n=1}^{10} \frac{n}{2^n}.$
3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$
4. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50 = \sum_{n=1}^{25} (-1)^{n-1} \times 2n.$

Exercice 7. Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$ (avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Preuve :

1. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

— Initialisation. Pour $n = 1, 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— Initialisation. Pour $n = 1, 1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6}$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right)(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

— Initialisation. Pour $n = 1, 1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4}$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \left(\frac{n^2}{4} + n+1\right)(n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. On va montrer que pour tout $n \geq 4$,

$$(P_n) : \quad 2^n \leq n!.$$

— Initialisation. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4! = 24$. C'est évident que (P_4) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $2^n \leq n!$.

Exercice 8. (Formule du binôme de Newton)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket = [0, n] \cap \mathbb{N}$, on note (avec la convention $0! = 1$) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Calculer $\binom{0}{0}$, $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

2. Formule du binôme de Newton.

(a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Preuve : Par définition, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

(b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Preuve : Par calcul direct, pour $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \left[\frac{p}{n} + \frac{n-p}{n} \right] = \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

(c) Montrer la formule du binôme de Newton : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve : On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_n) : \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, Gauche= 1 et Droite= 1. C'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n = (a+b) \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] a^i b^{n+1-i} + \underbrace{a^{n+1}}_{i=n+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{i=0}\end{aligned}$$

Par Triangle de Pascal, $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ pour $1 \leq i \leq n$. On en déduit que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3. Mise en pratique.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

Solution : Si on prend $a = b = 1$ dans la formule de Newton, on a

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Si on prend $a = -1$ et $b = 1$ dans la formule de Newton, on a

$$(-1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

(b) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$:

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Preuve : Par définition, pour $1 \leq p \leq n$,

$$\begin{aligned}p \binom{n}{p} &= p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n \binom{n-1}{p-1}.\end{aligned}$$

(c) En déduire la somme $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Par (b) et (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}.\end{aligned}$$

Exercice 9. (Factorisation de $a^n - b^n$)

Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

Preuve : Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \quad a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

— Initialisation. Pour $n = 1$, $a^n - b^n = (a - b) \times 1$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}) . En effet,

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + b^n(a - b) \\ &= a(a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} + b^n(a - b) \\ &= (a - b) \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} + b^n \right] \\ &= (a - b) \times \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} = (a - b) \times \sum_{i=0}^{(n+1)-1} a^i b^{(n+1)-1-i} . \end{aligned}$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

On peut aussi faire un raisonnement direct en commençant du membre de droite de l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned} (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n b^0 - a^0 b^n \\ &= a^n - b^n . \end{aligned}$$

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

Solution : Si on prend $a = x$ et $b = 1$ dans la formule de Newton, alors

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k .$$

On obtient que $S_n(x) = (x + 1)^n$.

2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$.

Solution : C'est évident que $S_n(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} . La dérivée est

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

D'ici, on a $T_n(x) = xS'_n(x)$. D'autre coté, puisque $S_n(x) = (x+1)^n$, sa dérivée est

$$S'_n(x) = n(x+1)^{n-1}.$$

On en déduit que

$$T_n(x) = xS'_n(x) = nx(x+1)^{n-1}.$$

3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : En particulier, si $x = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = T_n(1) = n2^{n-1},$$

c'est pareil que le résultat de l'Ex 8 (3c).

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes. On pourra admettre les résultats de l'exercice 7.

- | | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|--|--|
| 1. $\sum_{k=5}^{11} k$ | 2. $\sum_{i=2}^{10} (3+5i)$ | 3. $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$ | 4. $\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i}$ |
| 5. $\sum_{k=1}^n (2k+1)$ | 6. $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ | 7. Pour $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^n 5$ | 8. $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 2k + 1)$ |
| 9. $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1)$ | 10. $\sum_{k=1}^n 5^{2k}$ | 11. $\sum_{k=1}^n (2^k + k^2 + 1)$ | 12. $\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}$ |

Solution :

1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{11} k &= \sum_{k=1}^{11} k - \sum_{k=1}^4 k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=11} - \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=4} \\ &= 66 - 10 = 56. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{10} (3+5i) &= 3 * 9 + 5 * \sum_{i=1}^{10} i - 5 \\ &= 5 * \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=10} + 27 - 5 \\ &= 5 * 55 + 22 = 297 \end{aligned}$$

3. Rappelons que dans l'Ex 9, si on prend $b = 1$ et $a \neq 1$, on a

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} &= 6 * \sum_{k=5}^{11} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 6 * \left[\sum_{k=0}^{11} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^k \right] \\ &= 6 * \left[\frac{(2/3)^{12} - 1}{2/3 - 1} - \frac{(2/3)^5 - 1}{2/3 - 1} \right] = 6 * \frac{(2/3)^5 - (2/3)^{12}}{1 - 2/3} \\ &= \frac{64}{27} * \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7 \right] = \frac{131776}{59049}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i} &= 48 * \sum_{i=2}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= 48 * \left[\sum_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] \\ &= 48 * \left[\frac{(1/2)^{11} - 1}{1/2 - 1} - \frac{3}{2} \right] = 24 - \frac{3}{64} = \frac{1533}{64}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k + 1) &= 2 * \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 2 * \frac{n(n+1)}{2} + n = n(n+1) + n \\ &= n^2 + 2n. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k - 1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-1 - 1} - 1 = \frac{(-1)^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

7. Pour $n \geq 3$,

$$\sum_{k=3}^n 5 = 5(n - 2).$$

8.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 + 2k + 1) &= 3 * \sum_{k=1}^n k^2 + 2 * \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 3 * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 * \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) &= 2 * \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 * \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 - n}{2}. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 5^{2k} &= \sum_{k=0}^n (25)^k - 1 \\ &= \frac{(25)^{n+1} - 1}{25 - 1} - 1 = \frac{25^{n+1} - 25}{24}. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^k + k^2 + 1) &= \sum_{k=1}^n 2^k + \sum_{k=1}^n k^2 + n \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k - 1 + \sum_{k=1}^n k^2 + n \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \\ &= 2^{n+1} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6} - 2. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}} &= \frac{1}{4} * \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} * \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4} * \left[\frac{(\frac{3}{4})^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1} - 1 \right] = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 12. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=0}^n 3$

2. $\prod_{k=1}^n (2k)$

3. $\prod_{k=0}^n (2k + 1)$

4. $\prod_{k=0}^n q^k$

5. $\prod_{k=0}^n q^{2^k}$

Solution :

1.

$$\prod_{k=0}^n 3 = 3^{n+1}.$$

2.

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \times n!.$$

3.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^n (2k+1) &= \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^n q^k &= q^{\sum_{k=0}^n k} \\ &= q^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^n q^{2^k} &= q^{\sum_{k=0}^n 2^k} \\ &= q^{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}} = q^{2^{n+1}-1}\end{aligned}$$

Exercice 13. (Sommes et produits télescopiques)

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

Solution : Notons que

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

On veut que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1. \end{cases}$$

Donc, on prend $a = 1$ et $b = -1$ et on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

- (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution : Par (a), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

- (c) En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Solution :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^n k}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

3. Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \\ &= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

4. Calculer $\sum_{k=0}^n k \times k!$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1-1) \times k! \\ &= \sum_{k=0}^n [(k+1)! - k!] = \sum_{k=1}^{n+1} k! - \sum_{k=0}^n k! \\ &= (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$?

Solution : Observons que

$$P_n(0) = 1, \quad P_n(1) = \prod_{k=1}^n \frac{1+k}{k} = n+1.$$

Pour $x = -n$, $1 + \frac{x}{k} = 0$ lorsque $k = n$. Donc, $P_n(-n) = 0$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

Solution : Notons que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+x}{k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{n!}. \end{aligned}$$

Donc,

$$P_n(x-1) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+x-1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+x)}{n!}$$

D'ici, on a

$$P_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{n!} = \frac{x+n}{x} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+x)}{n!} = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(k)$ comme un coefficient binomial.

Solution : Par calcul, on a

$$P_n(0) = 1, \quad P_n(1) = n+1 = \binom{n+1}{1}, \quad P_n(2) = \frac{2+n}{2} P_n(1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}.$$

On conjecture que pour tout $k \geq 1$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(Q_k) : \quad P_n(k) = \binom{n+k}{k}.$$

On va le vérifier par récurrence.

— Initialisation. Pour $k = 1$, c'est évident que (Q_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (Q_k) est vrai. On va vérifier (Q_{k+1}) . En effet,

$$\begin{aligned} P_n(k+1) &= \frac{k+1+n}{k+1} P_n(k) = \frac{k+1+n}{k+1} \binom{n+k}{k} \\ &= \frac{k+1+n}{k+1} \times \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} \\ &= \binom{n+k+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Donc, (Q_{k+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_n(k) = \binom{n+k}{k}$.

Exercice 15. (Sommes doubles)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \right)$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$

3. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

Solution :

1. On observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \mathbf{1}_{j \geq i} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{j} \mathbf{1}_{j \geq i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \right) = \sum_{j=1}^n 1 = n. \end{aligned}$$

Alternativement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \right) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n 1 = n.
\end{aligned}$$

2. On observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right) \\
&= \sum_{i=1}^n i * \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n i * \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

3. On observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n ij \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \mathbf{1}_{j \geq i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j ij \mathbf{1}_{j \geq i} \right) = \sum_{j=1}^n j * \left(\sum_{i=1}^j i \right) \\
&= \sum_{j=1}^n j * \left(\frac{j(j+1)}{2} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j^3}{2} + \frac{j^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{2} * \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

Alternativement :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n ij \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=i}^n j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n i \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} \right) = \sum_{i=1}^n i \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n i \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)i}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{i^3 - i^2}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$