Feuille d'exercices n° 1

Révisions d'Analyse - Fonctions réelles

ORDRE ET INEGALITÉS

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Solution :

$$\frac{13}{15} < \frac{7}{8} < 1 < \frac{3}{5} + \frac{2}{3} < \sqrt{3} < 2$$

Rappelons que pour comparer $\sqrt{3}$ et un nombre rationnel a positif, il est pratique d'élever les carrés des deux nombres.

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.

   Solution : $x = \sqrt{x^4}$ implique que $x = |x^2| = x^2$. Observons que les solutions de $x = x^2$ sont $0, 1$. Donc, toutes les solutions réelles de $x = \sqrt{x^4}$ sont données par $x \in \{0, 1\}$.

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.

   Solution : $x \leq x^2$ est équivalent de l'inégalité $x(1-x) \leq 0$. En observant la courbe de la fonction $f(x) = x(1-x)$, on voit que $x(1-x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$. L'ensemble correspondant est $]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.

3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.

   Solution : Pour $x \geq -1$, $\sqrt{1+x} = 1-x$ implique que

   $$1 + x = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

   On a ainsi $x^2 - 3x = 0$ dont les solutions sont $x = 0, 3$. Notons que $x = 3$ ne vérifie pas $\sqrt{1+x} = 1-x$. Donc la solution de $\sqrt{1+x} = 1-x$ est $x = 0$.

4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

   Solution : On voit que

   $$\frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2} \iff \frac{1}{x-2} - \frac{1-x}{3x+2} < 0.$$

   C'est à dire,

   $$\frac{(3x+2)-(1-x)(x-2)}{(x-2)(3x+2)} = \frac{x^2+4}{(x-2)(3x+2)} < 0.$$

   Puisque $x^2 + 4 > 0$, c'est équivalent de dire que

   $$(x-2)(3x+2) < 0.$$

   En étudiant la courbe de la fonction $f(x) = (x-2)(3x+2)$, on a $-\frac{2}{3} < x < 2$.

Exercice 3. Donner les ensembles de définition maximaux des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t^2 + t + 3$

   Solution : c'est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. $t \mapsto \sqrt{(t-1)(t+1)}$

   Solution : c'est bien défini si $(t-1)(t+1) \geq 0$. Donc, cette fonction est bien définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.

3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 6}$

   Solution : c'est bien défini si $x^2 - 4x + 6 \neq 0$. Puisque $x^2 - 4x + 6 = 0$ n'a pas de solution réelle, donc cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4. $x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

   Solution : c'est bien défini si $x^2 - 4 > 0$. Donc, le domain de définition est $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$.

Exercice 4. Soient $x, y \in [0, 1]$. Montrer que $x^2 + y^2 - xy \leq 1$.

Solution : On a $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$ puisque $x, y \in [0, 1]$. Donc,

$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = -(1-x)(1-y) \leq 0 \text{ car } 0 \leq x, y \leq 1.$$

Ceci implique que $x^2 + y^2 - xy \leq 1$.

PARITÉ ET COMPOSITION

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Solution : On le montre par l'absurde. S'il existe un réel x tel que $f(x) \neq x$. Soit $f(x) > x$ soit $f(x) < x$. Si on a $f(x) > x$, on pose $y = f(x)$. Alors on a $f(y) \geq f(x)$ car f est croissante. De plus,

$$f(x) \leq f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = x.$$

C'est une contradiction.
Si on a $f(x) < x$, on pose $y = f(x)$. Alors $y < x$ implique que $f(y) \leq f(x)$. D'ici,

$$f(x) \geq f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = x.$$

C'est aussi une contradiction.
On en déduit que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ sinon} \end{cases}$.
Montrer que $f \circ f = id$.

Solution : On va montrer que $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Il y a deux cas.
Si $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = x$. Donc,

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x.$$

Si $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, $f(x) = 1 - x$. Donc,

$f \circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x)$ car $1-x \notin \mathbb{Q}$ lorsque $x \notin \mathbb{Q}$ (la somme de deux rationnels est un rationnel).

D'ici, $f(x) = x$. Ainsi, on conclut que $f \circ f = id$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Solution : Non. On a

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = (3x - 1)^2 + 1 = 9x^2 - 6x + 2$$

et

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 1 = 3x^2 + 2.$$

Donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 8.

1. Soient f et g deux fonctions réelles paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ?

   Solution : Si f et g sont deux fonctions réelles paires, alors

   $$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

   et

   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

   et

   $$f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = f \circ g(x).$$

   Donc, $f + g$, fg, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont paires.

2. Etudier le cas f et g impaires.

   Solution : Si f et g sont deux fonctions réelles impaires, alors

   $$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$$

   et

   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x)$$

   et

   $$f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -f \circ g(x).$$

   Donc, $f + g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont impaires et fg est paire.

3. Etudier le cas f paire et g impaire.

   Solution : Si f est paire et g est impaire, alors

   $$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x)$$

   et

   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x)$$

   et

   $$f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

   et

   $$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

   Donc, fg est impaire et $f \circ g$ et $g \circ f$ sont paires. On ne peut pas déterminer la parité de $f + g$.

Exercice 9.

1. Montrer que toute fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$.

   Solution : Soit f une fonction impaire définie en 0. Alors on a

   $$f(-x) = -f(x),$$

   pour tout x dans l'ensemble de définition. En particulier, on a $f(0) = f(-0) = -f(0)$. Donc $f(0) = 0$.

2. Montrer que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

   Solution : Soit f une fonction à la fois paire et impaire. Alors, pour tout x dans l'ensemble de définition,

   $$f(-x) = f(x) \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

   Ainsi, on a $f(x) = -f(x)$. Ceci implique que $f(x) = 0$ pour tout x dans l'ensemble de définition. Donc, f est la fonction nulle.

3. Montrer que toute fonction réelle se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

   Solution : Soit f une fonction réelle. On admettra que le domaine de la fonction est symétrique autour de 0 pour que $f(x)$ et $f(-x)$ soient définis. Pour tout x dans le domaine de f, on met en place un système d'équations à deux inconnues : $f(x) = p(x) + i(x)$ où p est censée être une fonction paire de x et i une fonction impaire de x. Si on réussit à résoudre un tel système pour tout x dans le domaine de f, on aura trouvé les fonctions souhaitées.

   Comme il y a deux inconnues, on cherche une deuxième équation qu'on forme en remplaçant x par $-x$: $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En résolvant ce système on obtient pour chaque x dans le domaine de f, $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. La vérification des propriétés de parité des deux fonctions p et i est laissée comme exercice.

4. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

   Solution : Soit f une fonction paire et dérivable. On pose $g(x) = f(-x)$. D'un côté, la dérivée de la composition donne

   $$g'(x) = f'(-x) \times (-1) = -f'(-x).$$

   D'un autre côté, puisque $g(x) = f(x)$ (f est paire), on a

   $$g'(x) = f'(x).$$

   Donc, $-f'(-x) = f'(x)$. La dérivée de f est impaire.

   On peut aussi raisonner en utilisant directement la définition de la dérivée. $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$.

   On remplace h par $-h$ par un changement de variable ce qui donne $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(-x-h) - f(-x)}{-h}$.

   Comme f est supposée être une fonction paire, $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{-h} = -\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x)$.

   Soit F une fonction impaire et dérivable. On pose $G(x) = -F(-x)$. Similairement, on a

   $$G'(x) = -F'(-x) \times (-1) = F'(-x)$$

et comme F est impaire,

$$G'(x) = F'(x)$$

car $G(x) = F(x)$. D'ici, on a $F'(-x) = F'(x)$. Donc, la dérivée de F est paire.

La solution en ne se servant que de la définition de la dérivée est laissée comme exercice.

DÉRIVATION ET COMPOSITION

Exercice 10. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(x^2(x+1)) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]1,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(\ln(x)) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll}]-\pi/2,\pi/2[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

Solution : On pose $u(x) = x^2(x+1)$ et observe que $f(x) = \sin \circ u(x)$. Donc,

$$f'(x) = \sin'(u(x)) \times u'(x) = \cos(x^2(x+1)) \times (3x^2 + 2x).$$

Il est connu que la dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$. Donc,

$$g'(x) = \ln'(\ln(x)) \times \ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

On pose $v(x) = \frac{1}{x}$. Alors $h(x) = v(\cos(x))$. D'ici, on a

$$h'(x) = v'(\cos(x)) \times \cos'(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)} \times (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)},$$

car $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 11. Retrouver les dérivées classiques des fonctions suivantes à l'aide du résultat sur la dérivation de fonctions réciproques :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{1/3} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{array}$$

Solution : On observe que la fonction réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(x) = x^3$. Notons que sa dérivée est $(f^{-1})'(x) = 3x^2$. C'est claire que

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

La dérivée de la composition nous donne

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1.$$

Cela implique que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{3f(x)^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

La fonction réciproque de g est $g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ avec $g^{-1}(x) = e^x$. Notons que $(g^{-1})'(x) = e^x$. Analoguement, on a

$$g^{-1} \circ g(x) = x, \forall x > 0.$$

La dérivée de la composition est

$$(g^{-1})'(g(x))g'(x) = 1, \forall x > 0.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{(g^{-1})'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f.

Solution : On le montre par récurrence. Pour $n = 0$, on a $fg = fg$, donc la formule est vraie trivialement. Pour $n = 1$, la règle du produit donne $(fg)' = f'g + fg'$, ce qui vérifie la formule. Supposons maintenant que c'est vrai pour n. On va calculer la $n+1$-ième dérivée de fg. En effet,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} =& \frac{d}{dx}(fg)^{(n)} \\
=& \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
=& \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

puisque $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Donc, on conclut par récurrence que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ETUDES DE FONCTIONS

Exercice 13.

PARTIE A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

   Solution : Lorsque $x \to +\infty$, on a $(x^2 - 2x + 2)\exp(-x) \to 0$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Lorsque $x \to -\infty$, on a

   $$e^{-x} \to +\infty \text{ et } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1.$$

   Donc,

   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

2. Calculer g' et déterminer son signe.

   Solution : On voit que

$$g'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x} - (2x - 2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 4)e^{-x} = (x - 2)^2 e^{-x}.$$

   C'est évident que $g'(x) \geq 0$.

3. En déduire le tableau de variations de g.

   Solution :

x	$-\infty$	$]-\infty, 2[$	2	$]2, +\infty[$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 - 2e^{-2}$	$\nearrow$	1

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

   Solution : g' est strictement positive sauf en un point, donc g est continue et strictement croissante. Cela implique que g est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty, 1[$. Donc, 0 admet un unique antécédent $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. En déduire le signe de g.

   Solution : Puisque g est strictement croissante,

$$g(x) \begin{cases} < 0 \text{ si } x < \alpha \\ = 0 \text{ si } x = \alpha \\ > 0 \text{ si } x > \alpha. \end{cases}$$

PARTIE B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   Solution : On écrit

$$f(x) = [\frac{x-1}{x^2+2}e^x + 1](x^2 + 2)e^{-x}.$$

   Lorsque $x \to -\infty$,

$$(x^2 + 2)e^{-x} \to \infty \text{ et } \frac{x-1}{x^2+2}e^x + 1 \to 1.$$

   Donc,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

   D'autre coté, lorsque $x \to +\infty$,

$$x - 1 \to +\infty \text{ et } (x^2 + 2)\exp(-x) \to 0.$$

   Du coup,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

2. Calculer f'. Dresser le tableau de variations de f.

   Solution : On voit que

$$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - (x^2 + 2)e^{-x} = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = g(x).$$

x	$]-\infty, \alpha[$	α	$]\alpha, \infty[$
$f'(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

Indication : On pourra s'aider de la partie A

3. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\exp(-\alpha))$.

   Solution : Rappelons que $g(\alpha) = 0$. Ceci implique que $1 = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\alpha) =& \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2)e^{-\alpha} \\ =& \alpha - 1 + 2\alpha e^{-\alpha} + (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = \alpha - 1 + 2\alpha e^{-\alpha} + 1 \\ =& \alpha + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha(1 + 2\exp(-\alpha)). \end{aligned}$$

4. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

   Solution : On voit que

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = g(0) = -1.$$

   Donc l'équation de la tangente T est $y = f'(0)x + f(0) = -x + 1$.

5. Tracer T puis $(\mathcal{C})$ (on admettra que $0.35 < \alpha < 0.36$ et que $0.85 < f(\alpha) < 0.86$).

Exercice 14. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

   Solution : f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La dérivée est

$$f'(x) = 3x^2(x-1)^{-2} - 2x^3(x-1)^{-3} = \frac{x^2}{(x-1)^2}\frac{x-3}{x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

   De plus, $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. On voit donc

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, +\infty[$
$f'(x)$	$+$		-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$f(3) = 27/4$	$\nearrow$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

   Solution : f est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus]-1, 1[$. La dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

   De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. On voit donc

x	$-\infty$	$]-\infty, -1[$	-1	1	$]1, +\infty[$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	1

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$.

   Solution : f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. La dérivée est

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 + 1 + \ln(x)}{x^2}, \forall x > 0.$$

   Notons que $x^2 f'(x)$ est strictement croissante avec $\lim_{x\to 0+} x^2 f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 f'(x) = +\infty$. Donc il existe un unique $\beta > 0$ tel que

$$f'(x) \begin{cases} < 0 \text{ si } 0 < x < \beta; \\ = 0 \text{ si } x = \beta; \\ > 0 \text{ si } x > \beta. \end{cases}$$

   Ceci implique le tableau suivant.

x	0	$]0,\beta[$	β	$]\beta,\infty[$	∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)>0$	$\nearrow$	$+\infty$

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Exercice 15. Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$, $x \longmapsto x^2-1$. Cette fonction est-elle bijective ?

Solution : Oui, la fonction est bijective. En effet, pour $x>1$,

$$f'(x) = 2x > 0.$$

Donc, f est une fonction continue et strictement croissante sur $[1,\infty[$ avec $f(1)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit que $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ est bijective.

Exercice 16.

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto n+1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto n+1 \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2+1 \end{array}$$

   Solution : f est injective mais pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

   g est injective et surjective, donc bijective.

   h n'est pas injective car $h(-1)=h(1)$. h n'est pas surjective car $h(x)\geq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

   (a) f est-elle injective ? Surjective ?

   Solution : On vérifie que $f(1/x) = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2x}{1+x^2} = f(x)$ pour $x\neq 0$. Donc f n'est pas injective car (par exemple) $f(2)=f(1/2)=\frac{4}{5}$. f n'est pas surjective car $f(x)=2$ n'a pas de solutions réelles.

   (b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)\in[-1,1]$.

   Solution : On va vérifier que

$$-(x^2+1)\leq 2x\leq x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

   En effet,

$$-(x^2+1)-2x = -(x^2+2x+1) = -(x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x^2+1)\leq 2x,$$

   et

$$x^2+1-2x = (x-1)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 2x.$$

   (c) Montrer que la restriction $g:[-1,1]\longrightarrow[-1,1], x\longmapsto f(x)$ est une bijection.

   Solution : Notons que f est continue et dérivable avec

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

   En particulier, si $x\in]-1,1[$, $f'(x)>0$. Donc g est strictement croissante et continue. De plus, $f(-1)=-1$ et $f(1)=1$. On en déduit que $g:[-1,1]\to[-1,1]$ est une bijection.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x/(x^2+1)$.

1. f est-elle injective ? surjective ? *Indication : pour l'injectivité, on pourra montrer que pour tous réels u, v, on a $f(u) = f(v) \Leftrightarrow 2(v-u)(uv-1) = 0$. Pour la surjectivité, on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = 2$.*
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
   Solution : On a montré que $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$. De plus, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la continuité de f implique que
   $$[-1, 1] \subset f(\mathbb{R}).$$
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], x \longmapsto f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.
   Solution : On a
   $$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Observons que $f'(-1) = f'(1) = 0$. De plus,
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$
   On a le tableau suivant

x	$-\infty$	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, \infty[$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   Si on trace la courbe de f, on voit que f n'est ni injective ni surjective et que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et que sa restriction sur $[-1, 1]$ est bijective.

Exercice 18. Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier les assertions suivantes (en proposer une d'emonstration si elles sont vraies, et un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses)

1. Si $f \circ g$ est surjective, alors f l'est aussi ;
   Solution : Vrai. En effet, si f n'est pas surjective, il existe $a \in \mathbb{R}$ qui n'a pas d'antécédent. Donc, $f(g(x)) = a$ n'a pas de solution. C'est une contradiction.
2. Si $f \circ g$ est surjective, alors g l'est aussi ;
   Solution : Faux. Par exemple, on définit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \ln|x|$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2$. Alors $f(g(x)) = \ln(x^2) = 2\ln|x|$ est surjective, mais g n'est pas surjective.
3. Si $f \circ g$ est injective, alors f l'est aussi ;
   Solution : Faux. On pose $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et
   $$g(x) = \begin{cases} e^x - 1, \text{ si } x \leq 0; \\ 1 - e^{-x}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$
   Alors $f(g(x)) = a$ implique $g(x) \in f^{-1}(\{a\}) \cap [-1, 1]$. Donc, $f \circ g$ est injective mais f n'est pas injective.
4. Si $f \circ g$ est injective, alors g l'est aussi ;
   Solution : Vrai. En effet, si g n'est pas injective, on a $g(x) = g(y)$ pour certain $x \neq y$. Cela implique que $f \circ g(x) = f \circ g(y)$. C'est une contradiction.
5. Si f est injective, alors $f \circ g$ l'est aussi.
   Solution : Faux. On pose $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Alors $f \circ g(x) = x^2$ n'est pas injective.