Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2023–2024

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 10

POLYNÔMES

Exercice 1. Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

a) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$, b) $X^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$, c) $X^6 - 4$,

d) $X^4 - 13X^2 + 36$, e) $X^4 + 6X^2 + 25$.

Solution :

a) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X-1)(X-2)(X-4)$. Donc ses racines dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{Q}$ sont $1, 2, 4$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, les racines complexes du $X^n - 1$ sont $X = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Si $n \in \mathbf{N}^*$ est impaire, les racines réelles/rationnelles sont $X = 1$; si $n \in \mathbf{N}^*$ est paire, les racines réelles/rationnelles sont $X = \pm 1$. Si $n = 0$, $X^n - 1 \equiv 0$.

c) $X^6 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$. Donc ses racines complexes sont $\pm\sqrt[3]{2}$, $\pm\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\pm\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ses racines réelles sont $\pm\sqrt[3]{2}$. Il n'y a pas de racines dans $\mathbf{Q}$.

d) On a $X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2 - 4)(X^2 - 9)$. Donc ses racines complexes/réelles/rationnelles sont ± 2 et ± 3.

e) On a $X^4 + 6X^2 + 25 = (X^2 + 3)^2 + 16 = (X^2 + 3 + 4i)(X^2 + 3 - 4i)$. Les racines complexes de $X^2 + 3 + 4i$ sont $\pm(1 - 2i)$ et les racines complexes de $X^2 + 3 - 4i$ sont $\pm(1 + 2i)$. Donc les racines complexes de $X^4 + 6X^2 + 25$ sont $\pm(1 - 2i)$ et $\pm(1 + 2i)$. Il n'existe pas de racine réelle.

$\square$

Exercice 2. Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

a) $X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$, b) $X^2 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$,

c) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$, d) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Solution :

a) Dans $\mathbf{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$, a et $aX + a$ divisent $X + 1$.

b) Dans $\mathbf{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$, a, $aX + a$, $aX - a$ et $aX^2 - a$ divisent $X^2 - 1$.

c) Dans $\mathbf{C}[X]$, pour tout $a \in \mathbf{C}^*$, a, $a(X + i)$, $a(X - i)$ et $a(X^2 + 1)$ divisent $X^2 + 1$.

d) Dans $\mathbf{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$, a et $a(X^2 + 1)$ divisent $X^2 + 1$.

$\square$

Exercice 3.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, on a $\overline{P(a)} = P(\overline{a})$.
2. Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P = Q$.
3. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$.

Solution :

1. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $c_k \in \mathbf{R}$, $\forall k = 0, \cdots, n$. Soit $a \in \mathbf{C}$. Alors
$$\overline{P(a)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} c_k a^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} \cdot \overline{a^k} = \sum_{k=0}^{n} c_k (\overline{a})^k = P(\overline{a}).$$
2. On pose $R = P - Q$. Alors R est un polynôme dans $\mathbf{C}[X]$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $R(x) = P(x) - Q(x) = 0$. Ceci implique que R possède une infinité de racines dans $\mathbf{C}$. On en déduit que R est la fonction nulle. Autrement dit, $P = Q$.
3. Disons que P est de degré n. Si $n = 0$, $P(X)$ est une fonction constante et $P(X) = P(0) \in \mathbf{R}$. Donc $P \in \mathbf{R}[X]$. Si $n \in \mathbf{N}^*$, on prend $n+1$ réels distincts $a_1, \cdots, a_{n+1}$ et on pose
$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{j \neq k, 1 \leq j \leq n+1} (X - a_j) \right] \frac{P(a_k)}{\prod_{j \neq k, 1 \leq j \leq n+1} (a_k - a_j)}.$$
Notons que $Q \in \mathbf{R}[X]$ car $P(a_k) \in \mathbf{R}$ pour $\forall k \in \{1, \cdots, n+1\}$. Le degré de Q est au maximum n. En effet, on peut montrer que $P = Q$. Observons que
$$Q(a_k) = P(a_k), \forall k = 1, \cdots, n+1.$$
Ceci implique que $P - Q$ est un polynôme de $\mathbf{C}[X]$, de degré $\leq n$, ayant $n+1$ racines complexes. Donc, on a $P - Q \equiv 0$. Autrement dit, $P = Q \in \mathbf{R}[X]$.

□

Exercice 4. Développer $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{R}[X]$. En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

Solution : On a $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$. Donc $100011 = P(10) = (10^3 - 10^2 + 1) \times (10^2 + 10 + 1) = 901 \times 111$. Donc 100011 n'est pas un nombre premier.

□

Exercice 5. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ (respectivement, par $X - b$). Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Commenter le cas $\lambda = \mu = 0$.

Solution : Il existent Q_1 et Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$ tels que
$$\begin{cases} P(X) = Q_1(X)(X - a) + \lambda; \\ P(X) = Q_2(X)(X - b) + \mu. \end{cases}$$

D'où, $Q_1(X)(X-a) - Q_2(X)(X-b) = \mu - \lambda$. Puisque $a \neq b$, $X-a$ et $X-b$ sont premiers entre eux et on a

$$\frac{\mu-\lambda}{b-a}(X-a) - \frac{\mu-\lambda}{b-a}(X-b) = \mu - \lambda.$$

On en déduit que

$$\left[Q_1(X) - \frac{\mu-\lambda}{b-a}\right](X-a) - \left[Q_2(X) - \frac{\mu-\lambda}{b-a}\right](X-b) = 0.$$

Donc, $X-b$ divise $\left[Q_1(X) - \frac{\mu-\lambda}{b-a}\right](X-a)$. Ensuite, on a $X-b$ divise $\left[Q_1(X) - \frac{\mu-\lambda}{b-a}\right]$. On obtient alors que

$$Q_1(X) = R(X)(X-b) + \frac{\mu-\lambda}{b-a} \text{ avec certain } R(X) \in \mathbf{R}[X].$$

Ainsi, on a $Q_2(X) = R(X)(X-a) + \frac{\mu-\lambda}{b-a}$ et

$$P(X) = \left[R(X)(X-b) + \frac{\mu-\lambda}{b-a}\right](X-a) + \lambda = R(X)(X-b)(X-a) + \frac{\mu-\lambda}{b-a}X + \frac{b\lambda - a\mu}{b-a}.$$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ est $\frac{\mu-\lambda}{b-a}X + \frac{b\lambda-a\mu}{b-a}$. En particulier, si $\lambda = \mu = 0$, P est divisible par $(X-a)(X-b)$.

$\square$

<u>Exercice 6.</u> Établir les identités, pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X+1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n = 2^n + 1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Solution : Notons que

$$X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \begin{cases} \frac{1-X^n}{1-X}, \text{ si } X \neq 1; \\ n, \text{ si } X = 1. \end{cases}$$

On en déduit que

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1), \forall X \in \mathbf{C}.$$

Similairement, on peut montrer que $X^{2n+1}+1 = (X+1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1)$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $M_n = 2^n - 1$ est premier. Supposons que n n'est pas premier. Alors il existent des entiers positifs $m, k \in \mathbf{N}^*$ tels que $n = mk$. On voit que

$$\begin{aligned} M_n =& (2-1) \times (2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) \\ =& (2^{mk-1} + \cdots + 2^{mk-k}) + (2^{mk-k-1} + \cdots + 2^{mk-2k}) + \cdots + (2^{k-1} + \cdots + 2 + 1) \\ =& \sum_{j=0}^{m-1} 2^{kj} \times (2^{k-1} + \cdots + 2 + 1) \end{aligned}$$

   Donc, $2^{k-1} + \cdots + 2 + 1$ divise M_n. C'est une contradiction. Par l'absurde, on conclut que si M_n est premier alors n est premier.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $F_n = 2^n + 1$ est premier. Supposons que $n \neq 0$ et n n'est pas une puissance de 2. Alors, on a
$$n = 2^k(2m+1) \text{ avec } (k,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*.$$
Observons que $2^{2^k} + 1 \neq F_n$ car $m \geq 1$. Or, on voit que $F_n = (2^{2^k})^{2m+1} + 1$ qui est divisible par $2^{2^k} + 1$. C'est une contradiction. Par l'absurde, on conclut que n soit nul, soit une puissance de 2.

□

Exercice 7. Pour quels entiers naturels n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$?

Solution : Clairement, pour $n = 0$, $X^{2n} + X^n + 1 = 3$ et n'est pas divisible par $X^2 + X + 1$. On admet dès maintenant que $n > 0$. Observons que si $n = 1$, $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme toute racine de $X^3 - 1$ est aussi racine $X^{3n} - 1$, on conclut que
$$X^3 - 1 \text{ divise } X^{3n} - 1.$$
Notons que
$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1),$$
et que
$$X^{3n} - 1 = (X^n - 1)(X^{2n} + X^n + 1) = (X-1)(X^{n-1} + \cdots + 1)(X^{2n} + X^n + 1).$$
Puisque $X - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux, on obtient que $X^2 + X + 1$ divise $(X^{n-1} + \cdots + 1)(X^{2n} + X^n + 1)$. Dans $\mathbf{R}[X]$, $X^2 + X + 1$ est premier. Donc soit $X^2 + X + 1$ divise $(X^{n-1} + \cdots + 1)$ soit $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$. Notons de plus que $(X^{n-1} + \cdots + 1)$ et $(X^{2n} + X^n + 1)$ sont premiers entre eux car $X^n - 1$ et $X^{2n} + X^n + 1$ sont premiers entre eux. Donc,
$$\text{soit } X^2 + X + 1 \text{ divise } X^{n-1} + \cdots + 1 \text{ et } X^2 + X + 1 \text{ ne divise pas } X^{2n} + X^n + 1;$$
$$\text{soit } X^2 + X + 1 \text{ divise } X^{2n} + X^n + 1 \text{ et } X^2 + X + 1 \text{ ne divise pas } X^{n-1} + \cdots + 1.$$
Observons que pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $n = 3k + r$ avec $k \in \mathbf{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Alors, le reste de la division de $X^{n-1} + \cdots + 1$ par $X^2 + X + 1$ est $X^{r-1} + \cdots + 1$ si $r \geq 1$ et 0 si $r = 0$ car
$$X^{n-1} + \cdots + 1 = (X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3}) + \cdots + (X^{n-3k+2} + X^{n-3k+1} + X^{n-3k}) + X^{r-1} + \cdots + 1.$$
C'est-à-dire, $X^2 + X + 1$ divise $(X^{n-1} + \cdots + 1)$ si et seulement si $3|n$ et $n \geq 3$. Réciproquement, $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ si et seulement si $n \in \mathbf{N}^*$ et 3 ne divise pas n.

□

Exercice 8. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

6. $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Solution :

1. Notons que $(X^{n+1} - 1) = (X-1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. On sait que les racines complexes de $X^{n+1} - 1$ sont $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ avec $k = 0, 1, \cdots, n$. Donc,
$$X^{n+1} - 1 = (X-1) \times \prod_{k=1}^{n} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}).$$
On en déduit que
$$X^n + X^{n-1} + \cdots + 1 = \prod_{k=1}^{n} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}).$$
2. Notons que les racines complexes de $X^{11} + 2^{11}$ sont $(-2)e^{i\frac{2k\pi}{11}}$ où $k = 0, \cdots, 10$. Donc, dans $\mathbf{C}[X]$,
$$X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10} (X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}})$$
De plus, les racines $(-2)e^{i\frac{2k\pi}{11}}$ et $(-2)e^{i\frac{2(11-k)\pi}{11}}$ sont conjuguées. En conséquence,
$$\begin{aligned} X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10} (X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}}) =& (X+2) \prod_{k=1}^{5} [(X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}})(X + 2e^{i\frac{2(11-k)\pi}{11}})] \\ =& (X+2) \prod_{k=1}^{5} (X^2 + 4\cos(\frac{2k\pi}{11})X + 4), \end{aligned}$$
dans $\mathbf{R}[X]$.
3. Les racines complexes de $X^4 + 4$ sont $\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ où $k = 0, 1, 2, 3$. Donc, dans $\mathbf{C}[X]$,
$$X^4 + 4 = (X - \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}).$$
Dans $\mathbf{R}[X]$ (ou dans $\mathbf{Q}[X]$), on a
$$X^4 + 4 = X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 = (X^2+2)^2 - (2X)^2 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$
4. Les racines complexes de $X^4 - j$ sont $e^{i\frac{(3k+1)\pi}{6}}$ où $k = 0, 1, 2, 3$. Dans $\mathbf{C}[X]$,
$$X^4 - j = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{4\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$$
5. Observons que
$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 =& X^8 + 2X^4 + 1 - X^4 \\ =& (X^4+1)^2 - X^4 = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ =& (X^4 + 2X^2 + 1 - X^2)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ =& [(X^2+1)^2 - X^2][(X^2+1)^2 - 3X^2] \\ =& (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$
6. Notons que les racines complexes de $X^5 - 1$ sont $X = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Donc,
$$\begin{aligned} X^5 - 1 =& (X-1)(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}}) \\ =& (X-1)[(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}})] \times [(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}})] \\ =& (X-1)[(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{5}})] \times [(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{-i\frac{4\pi}{5}})] \\ =& (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1) \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 9. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$.

Solution :

1. On calcule : $P(i) = (-i)^2 + 1 = 0$.
2. Puisque P $\mathbb{R}[X]$ on a aussi $-i$ qui est racine. Donc $X^2 + 1|P$. On effectue la division eucidienne : $P = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$. Puisque P n'a pas de racines réelles ($P(x) \geq 1$ pour tout x) on a la décompostion de P dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbf{C}$, on cherche les racines via le discriminant. On obtient $P = (X - i)(X + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$.

□

Exercice 10. Soit $a \in \mathbf{R}$, $n \in N$, et le polynôme $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbf{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

Solution :
On peut écrire ce reste sous la forme $bX + c$. On a alors

$$P = Q \cdot (X^2 + 1) + bX + c.$$

De là, on obtient $P(i) = bi + c = exp(ina)$ et $P(i) = -bi + c = exp(-ina)$. On en déduit que $b = sin(na)$ et $c = cos(na)$.

□

Exercice 11. On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$ (on pourra utiliser judicieusement le fait que P est pair).

Solution :

1. On utilise la relation $j^3 = 1$ pour obtenir

$$P(j) = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3j^2 + 3j + 3.$$

Or, j est racine de $X^2 + X + 1$, donc $j^2 = -j - 1$. On a donc

$$P(j) = 0.$$

On calcule maintenant la dérivée :

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X = 4X(2X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1).$$

On a alors

$$P'(j) = 4j(2 + 3j + 3j^2 + 1) = 4jP(j) = 0.$$

Ensuite, on calcule la dérivée seconde :

$$P'' = 4(2X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1) + 4X(12X^5 + 12X^3 + 6X).$$

On a donc
$$P''(j) = 24j^2(2j + 2j^2 + 1) = -24j^2 \neq 0.$$
Donc j est racine de P d'ordre de multiplicité 2.

2. Puisque P est pair, pour chacune de ses racines, comptées avec multiplicité, l'opposé est racine aussi.
   Donc $-j$ est racine de multiplicité 2.
   D'autre part, puisque P est un polynôme réel, on a $\overline{j}$ et $-\overline{j}$ qui sont racines de multiplicité 2.
   Finalement,
$$P = (X - j)^2(X + j)^2(X - j^2)^2(X + j^2)^2.$$

$\square$

<u>Exercice 12.</u> Soit le polynôme $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1 \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer a.
2. Montrer que -1 est racine double de P.
3. Montrer que j est racine multiple de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Solution :

1. $P(-1) = 1 - 4 + 8 - 10 + a - 4 + 1 = -8 + a$ donc $P(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 8$.
2. Deux solutions : faire la division euclidienne de P par $X+1$ et voir si 1 est racine puis recommencer, ou calculer les dérivées.
$$P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4.$$
   On a bien $P'(-1) = 0$. De plus,
$$P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16 \text{ et } P''(-1) = 2 \neq 0$$
   donc -1 est racine double de P.
3. $P(j) = 1 + 4j^2 + 8j + 10 + 8j^2 + 4j + 1$ et en utilisant $j^2 = -j - 1$ on obtient $P(j) = 0$.
   On calcule
$$P'(j) = 2(3j^2 + 10j + 16 + 15j^2 + 8j + 2) = 36(j^2 + j + 1) = 0.$$
   De même,
$$P''(j) = 30j + 80 + 96j^2 + 60j + 16 = -6j \neq 0$$
   donc j est racine double de P.
4. Puisque P est à coefficients réels, j^2 est racine double de P et on a alors
$$P = ((X + 1)(X - j)(X - j^2))^2.$$
   Dans $\mathbf{R}$ on a alors
$$P = ((X + 1)(X^2 + X + 1))^2.$$

$\square$

Exercice 13. Soit θ un réel, et n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que le reste de la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n\sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ par $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ est nul. Qu'en est-il dans $\mathbf{R}[X]$?

Solution : On écrit $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$, donc il s'agit de vérifier si

$$e^{in\theta}\sin(\theta) - e^{i\theta}\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) = 0$$

et la même chose pour $e^{-i\theta}$. On écrit $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et on a

$$\begin{aligned} e^{in\theta}\sin(\theta) - e^{i\theta}\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) &= \cos(n\theta)\sin(\theta) + i\sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &\quad - \cos(\theta)\sin(n\theta) - i\sin(n\theta)\sin(\theta) + sin((n-1)\theta) \\ &= \cos(n\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(n\theta) + sin((n-1)\theta) \\ &= -sin((n-1)\theta) + sin((n-1)\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque P est à coefficients réels on a alors aussi $e^{-i\theta}$ qui est racine de P. Le reste de la division euclidienne dans $\mathbf{C}$ est donc 0, on peut écrire $P = Q \cdot (X^2 - 2cos(\theta)X + 1)$ avec $Q \in \mathbf{C}[X]$.
Supposons que le reste de la division eucidienne dans $\mathbf{R}$ n'est pas 0. On a alors $P = Q_1 \cdot (X^2 - 2cos(\theta)X + 1) + aX + b$ pour un polynôme réel Q_1 et des réels a et b. Cela donne alors, dans $\mathbf{C}$,

$$Q_1 \cdot (X^2 - 2cos(\theta)X + 1) + aX + b = Q \cdot (X^2 - 2cos(\theta)X + 1)$$

et donc $X^2 - 2cos(\theta)X + 1 \mid aX + b$ donc $a = b = 0$.

□

Exercice 14.

1. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $2X^4+X^2+X+1$ et de $X^6-X^5+X^4-2X^3+3X^2-3X+1$.
2. Montrer que les polynômes $X^4 - 1$ et $X^3 + 2X^2 - X - 1$ sont premiers entre eux, et établir un relation de Bézout entre eux.
3. Soient les polynômes complexes $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire une relation de Bézout entre A et B. Déterminer tous les couples de polynômes (U, V) vérifiant cette identité.
4. Reprendre la question 3. avec $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B = X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 15. Soit n et m deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Solution : Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On peut supposer sans perte de généralité que $n \geq m$. Soit $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m Alors la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est la suivante :

$$X^n - 1 \;=\; (X^{(n-m)} + \ldots + X^m + 1)(X^m - 1) \text{ si } m \text{ divise } n\text{, et donc } r = 0\,;$$

$$X^n - 1 \;=\; (X^{(n-m)} + \ldots + X^{(n-mq)})(X^m - 1) + X^r - 1 \text{ si } m \text{ ne divise pas } n\text{, et donc } 1 \leq r < m\,.$$

Il en découle que l'application de l'algorithme euclidien aux deux polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$ induit l'application de l'algorithme euclidien aux degrés des polynômes à chaque étape. Par conséquent, à la fin le PGCD unitaire est $X^{\mathrm{PGCD}(m,n)} - 1$.

□

Exercice 16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ, μ pour que X^2+1 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Solution :
P divise $X^2+1 \Leftrightarrow P$ divise $X-i$ et $X+i \Leftrightarrow i$ et $-i$ sont des racines de $P \Leftrightarrow P(i) = P(-i) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-i-\lambda+\mu i+2=0 \\ 1+i-\lambda-\mu i+2=0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \lambda = 3, \mu = 2.$

Exercice 17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X^2-2X\cos(2k\pi/n)+1) = (X^n-1)^2.$$

Solution :
On a $X^n-1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2k\pi}{n}}\right) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{-\frac{2k\pi}{n}}\right)$ cela donne :

$$(X^n-1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2k\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2k\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(X-e^{\frac{-2k\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}(X^2-2X\cos(2k\pi/n)+1)$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, et soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose $e_0 = 1$ et, pour k compris entre 1 et n :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des e_k :

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1, \\
e_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \\
e_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_n) + \cdots + (z_{n-1}z_n), \\
&\vdots \\
e_{n-1} &= z_2 \cdots z_n + z_1z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 \cdots z_{n-1}, \\
e_n &= z_1z_2 \cdots z_n.
\end{aligned}$$

1. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), écrire explicitement e_1, e_2 (resp. e_1, e_2, e_3) et montrer que

   $$(X-z_1)(X-z_2) = X^2 - e_1X + e_2 \qquad \big(\text{resp. } (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3\big).$$

2. Pour n quelconque, montrer que l'on a :

   $$\prod_{j=1}^{n}(X-z_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n-k}\ .$$

3. Sachant que $2i$ et $3-i$ sont des racines de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i$, calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, déterminer sans calcul $\sum_{1\leq j\leq n} e^{2\pi ij/n}$ et $\sum_{1\leq j<k\leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$.

Solution :

1. $\underline{n=2}$:

$e_0 = 1,\ e_1 = z_1 + z_2,\ e_2 = z_1 z_2.$

Donc $(X-z_1)(X-z_2) = X^2 - X(z_1+z_2) + z_1 z_2 = X^2 - e_1 X + e_2.$

$\underline{n=3}$:

$e_0 = 1,\ e_1 = z_1 + z_2 + z_3,\ e_2 = z_1 z_2 + z_1 z_2 + z_2 z_3,\ e_3 = z_1 z_2 z_3.$

Donc $(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3 - (z-1+z_2+z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_1z_2 + z_2z_3)X - z_1z_2z_3 = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3.$

2. On demontre le resultat par recurrence :

Initialisation : pour $n = 2$, le resultat est vrai.

Heridite : on suppose que (P_n) est vraie et on demontre que P_{n+1} l'est aussi,

Soient $\{e_k, k \in \{0,..,n\}\}$ comme precedement definits et :

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1,\\
d_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1},\\
d_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_{n+1}) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_{n+1}) + \cdots + (z_nz_{n+1}),\\
&\vdots\\
d_n &= z_2\cdots z_{n+1} + z_1z_3\cdots z_{n+1} + \cdots + z_1\cdots z_n,\\
d_{n+1} &= z_1z_2\cdots z_{n+1}.
\end{aligned}$$

Le but est de montrer que :

$$\prod_{j=1}^{n+1}(X-z_j) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k d_k X^{n+1-k}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n+1}(X-z_j) &= (X-z_{n+1})\prod_{j=1}^{n}(X-z_j)\\
&= (X-z_{n+1})\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n-k} \quad (P_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n} z_{n+1}(-1)^{k+1}e_kX^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} z_{n+1}(-1)^{k}e_{k-1}X^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n+1-k}\\
&= (-1)^{n+1}z_{n+1}e_n + \sum_{k=1}^{n} z_{n+1}(-1)^{k}e_{k-1}X^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e_k X^{n+1-k} + e_0X^{n+1}\\
&= d_0X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_{n+1}\left((-1)^k e_{k-1} + (-1)^k e_k\right)X^{n+1-k} + (-1)^{n+1}d_{n+1} \quad \text{car } z_{n+1}e_n = d_{n+1},\ e_0 = d_0\\
&= d_0X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_{n+1}((-1)^k d_k)X^{n+1-k} + (-1)^{n+1}d_{n+1} \quad \text{car } e_{k-1} + e_k = d_k\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k d_k X^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \prod_{j=1}^{n}(X-z_j)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n+1-k}$.
3. D'apres la question 2., si on note z la troisieme racine de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i$ on a : $(2i)+(3-i)+z_3=e_1=-i-1$ donc : $z_3=-4-2i$.
4. Si $n\geq 2$, les $e^{i\frac{2\pi j}{n}}, j\{1,..,n\}$ sont les racines du polynome X^n-1 donc : $\sum_{1\leq j\leq n} e^{2\pi ij/n}=e_1=0$
On a : $e^{2\pi i(j+k)/n}=e^{i\frac{2\pi j}{n}}e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, donc, Idem : $\sum_{1\leq j<k\leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}=e_2=\begin{cases}0 \text{ si } n\geq 3.\\ -1 \text{ si } n=2.\end{cases}$

Exercice 19. Soit $P(X)=X^4+12X-5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Solution :

On suppose que a,b sont les racines tels que : $a+b=2$,. Soient maintenant c,d les deux autres racines de ce polynome.
D'apres l'exercie 18. on a $0=e_1=a+b+c+d$ et donc $c+d=-2$.
Puisque : $P=((X-a)(X-b))((X-c)(X-d))=(X^2-2X+ab)(X^2+2X+cd)=X^4+(-4+ab+cd)X^2+(2ab-2cd)X+(ab)(cd)$ on a :

$$\begin{cases}a+b=2.\\ c+d=-2\\ ab+cd=4\\ ab-cd=6\\ (ab)(cd)=-5.\end{cases} \implies \begin{cases}a+b=2.\\ ab=5\\ c+d=-2\\ cd=-1.\end{cases} \implies \begin{cases}(a,b)\in(1+2i,1-2i)\\ (c,d)\in(-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}).\end{cases}$$

La decomposition dans $\mathbf{C}[X]$ est donnee par :

$$P=(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X-1-2i)(X-1+2i)$$

La decomposition dans $\mathbf{R}[X]$ est donnee par :

$$P=(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X^2-2X+5).$$

□

Exercice 20. Quels sont les polynômes $P\in\mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Solution :

$P\in\mathbf{C}[X]$, on suppose que $P'|P$ et que $P\neq 0$
Si $deg(P)=0$ alors $P'=0$ ce qui est exclu. Par consequent $deg(P)\geq 1$.
Alors $\exists Q\in\mathbf{C}[X]$ tel que $P=QP'$, or $deg(P)=deq(P')+deg(Q) \implies deq(Q)=1$.
Soit r une racine de P, comme $P=QP'$ on a :

$$\text{multiplicité de } r \text{ pour } P = \text{multiplicité de } r \text{ pour } P' + \text{multiplicité de } r \text{ pour } Q$$

Or par definition, on a :

$$\text{multiplicité de } r \text{ pour } P = \text{multiplicité de } r \text{ pour } P'+1$$

Donc r est une racine de Q, comme Q est de la forme $x\mapsto ax+b, a\neq 0$ alors il admet une seule racine qui est r, cela implque que P admet une seule racine, cette racine est de multiplicité $deg(P)$.
En conséquence, $\exists c\in\mathbf{C}^*, r\in\mathbf{C}$ tel que : $P=c(X-r)^{deg(P)}$.. Réciproquement, on peut verifier que les polynômes de cette forme satisfont : $P'|P$.

□

Exercice 21.

1. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Solution :
1. On a $X^2 - X + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})$
2. $n \in \mathbf{N}$, on a : $X^2 - X + 1 | (X-1)^{n+2} + X^{2n+1} \Leftrightarrow (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) | (X-1)^{n+2} + X^{2n+1} \Leftrightarrow$ $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$sont des racines de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.
Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{-\pi}{6}}) = e^{i\frac{\pi}{6}}(2isin(\frac{\pi}{6})) = e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
Alors,
$(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)^{n+2} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{n+2} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+4} + (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1}\Big((e^{i\frac{\pi}{3}})^3 + 1\Big) =$ $(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1}(e^{i\pi} + 1) = 0$
Le polynome $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est dans $\mathbf{R}[X]$ et donc il admet $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ comme racine, par consequent $X^2 - X + 1 | (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Exercice 22. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ défini par $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$.

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé P'.
2. Montrer que P n'admet aucune racine réelle.
3. Déduire des questions précédentes que P admet 3 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, notées α, β et γ.
4. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Solution :
1. $P' = 3X^2 + 6X + 2$ donc les racines de P' sont : $x_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. On a : $P(X) = 0 \Leftrightarrow -i = -(X^3 + 3X^2 + 2X)$ qui ne peut jamais etre vraie si $X \in \mathbf{R}$.
3. P n'admet aucune racine reelle, donc toutes ces racines sont complexes, comme la derive de P n'admet aucune racince complexes, alors P n'admet aucune racine de multiplicite ≥ 2.Enfin, P admet 3 racine complexes (non reelles) distinctes.
4. Supposons que a, b et c sont les racince de P, d'apres l'exercice 18. on a :

$$\begin{cases} a + b + c = (-1)^1 e_1 = -3 \\ ab + ac + bc = (-1)^2 e_2 = 2 \\ abc = (-1)^3 e_3 = -i \end{cases}$$

Cela implique que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (-3)^2 - 2(2) = 5.$$

Et,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(ab+ac+bc)(a+b+c) + 3abc = -27 - 3(2)(-3) + 3(-i) = -9 - 3i.$$

□

Exercice 23. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les racines complexes du polynôme $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$. Montrer que ces nombres sont différents de 0. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.

Exercice 24. Déterminer le PGCD unitaire de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et de $X^4 - 1$, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

Solution : Dans cet exercice, on peut déterminer le PGCD en utilisant la division euclidienne. Néanmoins, le polynôme $X^4 - 1$ a des racines qu'on peut facilement déterminer : $i, -i, 1, -1$. Il suffit de déterminer lesquelles sont aussi racines de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. On voit que c'est le cas de -1. Par conséquent, $X + 1$ est le PGCD recherché.

□

Exercice 25. Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par $X - 1$, et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, par $X - 3$ et par $X - 4$ soient égaux (mais certainement non nuls).

Solution : Dans un premier temps on détermine les polynômes unitaires P ayant les propriétés décrits dans l'énoncé. Comme P divisible par $X - 1$, il est de la forme $(X - 1)(X^2 + bX + c)$ avec b et c à déterminer. L'hypothèse sur les restes des divisions euclidiennes revient à dire que $P(2) = P(3) = P(4)$. Alors on obtient les équations

$$4 + 2b + c \;=\; 2(9 + 3b + c) \;=\; 3(16 + 4b + c) \;.$$

On en déduit un système de deux équations avec les inconnues b et c.

$$\begin{aligned} 4 + 2b + c &= 2(9 + 3b + c) \qquad (1) \\ 2(9 + 3b + c) &= 3(16 + 4b + c) \qquad (2) \end{aligned}$$

Une fois résolue, ce système a comme solution unique $(b, c) = (-8, 18)$. Par conséquent, $P = X^3 - 9X^2 + 26X - 18$. En multipliant P par des constantes non nulles, on trouve les solutions non unitaires.

□

Exercice 26. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Solution : La dérivée de P est $a(n + 1)X^n + bnX^{(n-1)}$. Pour que 1 soit une racine multiple, il est nécessaire et suffisant que $P(1) = P'(1) = 0$. Les deux équations aux inconnues a, b, c qui en découlent sont

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a(n + 1) + bn(n - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc exprimer b et c en fonction de a :

$$\begin{aligned} b &= -\frac{n+1}{n}a \\ c &= -(a + b) = -\frac{a}{n} \end{aligned}$$

Ces égalités nous montrent que nous pouvons choisir a, b, c pour que 1 soit une racine de multiplicité au moins 2.

Est-il possible d'aller au delà de 2 ? Ceci équivaut à ce que P'' s'annule en 1. On calcule $P''(X) = an(n+1)X^{(n-1)} + bn(n-1)X^{(n-1)}$. Alors $P''(1) = an(n+1) + bn(n-1) = an(n+1) - a(n+1)(n-1) = a(n+1)$. Cette dernière expression est 0 si et seulement si $a = 0$. Or, ceci implique que $b = c = 0$. On conclut que la multiplicité de 1 est au plus 2.

□

Exercice 27. Factoriser X^6+X^3+1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 28. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les polynômes $1+X+\ldots+\dfrac{X^n}{n!}$ et $1+X+X^n$ n'ont que des racines simples dans $\mathbf{C}$.

Solution : On notera $P_n = 1+X+\ldots+\dfrac{X^n}{n!}$ et $Q_n = 1+X+X^n$. Des le début, on peut supposer que $n > 1$.
En calculant la dérivée de P_n, on trouve que $P_n = \dfrac{X^n}{n!} + P_{n-1}$. Par conséquent, si $r \in \mathbb{R}$ est une racine double, alors $0 = P_n(r) = \dfrac{r^n}{n!} + P_{n-1}(r) = \dfrac{r^n}{n!}$. Il en découle que $r = 0$. Or 0 n'est pas racine de P_n.
La dérivée de Q_n est $Q'_n = 1+nX^{n-1}$. Si $r \in \mathbb{R}$ est racine double de Q_n, alors les égalités suivantes sont vraies :

$$Q_n(r) = 1+r+r^n = 0 = Q'_n(r) = 1+nr^{n-1} .$$

Or, $r+r^n = r(1+nr^{n-1}) = r.0 = 0$. Il en résulte que $1+0=0$, absurde.

□

Exercice 29. Montrer que le polynôme $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

Solution : La conclusion de l'existence d'une racine réelle s'obtient en appliquant le TVI après avoir constaté que P est de degré impair. Supposons maintenant que P ait une racine rationnelle de la forme $\dfrac{m}{n}$ avec m et n deux entiers premiers entre eux. Comme $P(\frac{m}{n}) = 0$, $\dfrac{m^{163}}{n^{163}} = 24\dfrac{m^{57}}{n^{57}} + 6$. Ceci équivaut à $m^{163} = 24m^{57}n^{106} + 6n^{163}$. En particulier, m^{163} est pair, et donc m est pair (pourquoi ?). Comme m et n sont premiers entre eux, n est impair.
L'égalité $m^{163} = 6n^{106}(4m^{57}n^{57}+6)$ équivaut à $m^{163} = 6n^{106}(4m^{57}+n^{57})$. L'imparité de n montre que la puissance la plus élevée de 2 qui divise m^{163} est 2. Or c'est au moins 2^{163}, absurde. On conclut que P n'a pas de racine rationnelle.

□

Exercice 30. Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Solution : Puisque P est de degré 4, il ne peut être le carré que d'un polynôme de degré deux. On cherche donc les valeurs de a et b telles qu'il existe λ, c et d tels que

$$X^2 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1 = (\lambda X^2 + cX + d)^2 = \lambda^2 X^4 + 2\lambda c X^3 + (2\lambda d + c^2)X^2 + 2cdX + d^2.$$

Par identification, si la solution existe si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1 \\ 2\lambda c = 2a \\ 2\lambda d + c^2 = b \\ 2cd = 2 \\ d^2 = 1 \end{cases}$$

a une solution. Puisque $d^2 = 1$ et $cd = 1$, alors $c = d = \pm 1$. De plus $\lambda = \pm 1$. On a donc que $a = \lambda c$ et $b = 2\lambda c + 1$. Puisqu'il n'y a que deux valeurs possibles à λc, à savoir 1 ou -1, le système a donc deux solutions, $a = 1$ et $b = 3$ ou $a = -1$ et $b = -1$.
Ainsi, il faut et il suffit que $(a, b) \in \{(1, 3); (-1, -1)\}$ pour que le polynôme P soit un carré.

Exercice 31.

1. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre entiers. Trouver deux entiers q_1 et q_2 tels que $(p_1^2+p_2^2)(p_3^2+p_4^2) = q_1^2+q_2^2$. *(Indication : manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$).*
2. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels Q_1, Q_2 tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (a) Pour tout réel x, on a $P(x) \geq 0$.
   (b) Il existe Q_1, Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

Solution :

1. Posons $p = p_1 + ip_2$, $p' = p_3 + ip_4$. Le problème devient de trouver $q = q_1 + iq_2$ où $(q_1, q_2) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $|p|^2|p'|^2 = |q|^2$. Il est donc clair que poser $q = pp'$ convient, et de plus ses parties réelles et imaginaires sont entières. En développant, on trouve en effet $q_1 = p_1p_3 - p_2p_4 \in \mathbf{Z}$ et $q_2 = p_2p_3 + p_1p_4$.
2. On pose $Q_1 = P_1P_3 - P_2P_4$ et $Q_2 = P_2P_3 + P_1P_4$, qui sont des polynômes réels, et en développant on retrouve bien que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. L'implication $b) \Rightarrow a)$ est évidente. Montrons la réciproque. Soit P un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geq 0$. On sait alors que P se décompose en facteurs irréductibles de la forme $X^2 + 2bX + c^2$, avec $b^2 - c^2 \leq 0$, car sinon P aurait une racine simple, ce qui n'est pas possible à cause de son signe. On note $P = P_1 \dots P_r$ la décomposition en facteurs irréductibles de P. Pour $1 \leq n \leq r$. Posons l'hypothèse de récurrence H_n : "Il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $P_1 \dots P_n = Q_1^2 + Q_2^2$".
   Initialisons. $P_1 = X^2 + 2bX + c^2 = (X - b)^2 + \sqrt{c^2 - b^2}$, donc H_1 est vraie.
   La question 2 montre que si H_n est vraie, alors H_{n+1}. Par récurrence, on a donc pour tout $1 \leq n \leq r$, H_n est vraie. En particulier H_r est vraie et donc il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

Exercice 32. Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

a) $P(X^2 + 1) = P(X)$,

b) $P(2X + 1) = P(X)$,

c) $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,

d) $P'(X)^2 = 4P(X)$,

e) $P(P(X)) = P(X)$.

Solution :

a) Considérons les degrés : $\deg[P(X^2 + 1)] = 2\deg P$, mais doit être aussi égal à $\deg P$, donc $\deg P \in \{-\infty, 0\}$. Réciproquement, tous les polynômes constant conviennent. Ce sont donc les seules solutions.

b) Si le polynôme P est non nul, il s'écrit de manière unique comme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$. Or, $P(2x + 1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (2X + 1)^k$. Par identification du terme de plus haut degré, on a $a_n = 2^n a_n$. Puisque $a_n \neq 0$, on a donc $2^n = 1$, c'est à dire $n = 0$. Puisque les polynômes constant et le polynôme nul conviennent, ce sont les seules solutions.

c) Puisque le polynôme nul n'est pas solution, P s'écrit de façon unique comme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d \neq 0$. Si $d = 0$, il n'existe de solution que si $n = 0$ et alors $P = 1$. On suppose donc désormais que $d \geq 1$. On a donc

$$\begin{aligned}(1-X)P'(X) - P(X) &= \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} - \sum_{k=1}^{d} k a_k X^k - \sum_{k=0}^{d} X^k \\ &= a_1 - a_0 + \sum_{k=1}^{d-1}[(k+1)a_{k+1} - k a_k - a_k]X^k - (d+1)a_d X^d.\end{aligned}$$

Ainsi, commençons par voir que puisque $-(d+1)a_d \neq 0$, alors $d = n$ nécessairement. On a alors par identification $a_n = -\frac{1}{n+1}$, $a_1 - a_0 = 0$ et pour tout $1 \leq k \leq d-1$, $[(k+1)a_{k+1} - k a_k - a_k] = 0$, c'est à dire $a_{k+1} = a_k$. Ainsi, pour tout $0 \leq k \leq d$, $a_k = a_n = \frac{1}{n+1}$. Il ne peut y avoir au plus qu'une seule solution, et l'on vérifie facilement que le polynôme $P = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k$ convient en effet.

d) Puisque $\deg[P'(X)^2] = 2(\deg P - 1)$, on a donc $2(\deg P - 1) = \deg$ c'est à dire $\deg P = 2$. On cherche donc une solution de la forme $P = aX^2 + bX + c$. On a donc $(2aX+b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$, et donc par identification $4a^2 = 4a$, $4ab = 4b$ et $b^2 = 4c$. Donc $a = 1$ puisque $a \neq 0$, et $c = b^2/4$. Réciproquement les polynômes $P = X^2 + bX + b^2/4 = (X - b/2)^2$ sont tous solutions.

Une autre façon de le prouver est de remarquer que puisque P est de degré plus grand que 1, P a une racine α dans $\mathbf{C}$. C'est à dire $(X-\alpha)|P$. Or $P = P'^2$ donc $(X-\alpha)|P'^2$, donc $(X-\alpha)|P'$, donc $(X-\alpha)^2|P'^2$, c'est à dire $(X-\alpha)^2|P$. Reste à montrer que le polynôme est unitaire pour conclure.

e) Puisque $\deg[P(P(X))] = (\deg P)^2$, on a donc que P est le polynôme nul ou $\deg P \in \{0, 1\}$. On cherche donc les solutions parmi les polynômes $P = aX + b$. On a alors $a(aX+b) + b = ax + b$ donc par identification $a^2 = a$ et $ab + b = b$, d'où $a = 0$ ou $a = 1$, et si $a = 1$, alors $b = 0$. Puisque qu'ils conviennent, les solutions sont donc les polynômes constants et le polynôme X.

Exercice 33.

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Solution :

1. Si Q est le polynôme nul, c'est trivial, sinon $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k X^k$. On a alors

$$\begin{aligned}Q(P_1) - Q(P_2) &= \sum_{k=0}^{d} a_k[(P_1(X))^k - (P_2(X))^k] \\ &= \sum_{k=0}^{d}\left(a_k(P_1(X) - P_2(X))\sum_{j=0}^{k-1}(P_1(X))^j(P_2(X))^{k-j-1}\right) \\ &= (P_1(X) - P_2(X))\sum_{k=0}^{d}\left(a_k\sum_{j=0}^{k-1}(P_1(X))^j(P_2(X))^{k-j-1}\right).\end{aligned}$$

Puisque le terme dans la somme est un polynôme, $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.

2. D'après la question précédent, $P(X) - X$ divise$P(P(X)) - P(X)$. Mais $P(X) - X$ se divise lui même, donc $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = P(P(X)) - X$.

Exercice 34. **(Polynômes de Tchebychev)** On considère la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Solution :

1. $P_2 = 2X^2 - 1$,
   $P_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$,
   $P_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Par récurrence double, montrons que $P_n = 2^n X^n + Q_n$ où Q_n est de degré au plus $n-1$. Cette proposition est vraie aux rangs 1 et 2 (au rang 0 éventuellement aussi, mais pour éviter l'ambiguïté du degré du polynôme nul, initialisons à 1 et 2.).
   Supposons cet énoncé vrai aux rangs n et $n+1$. On a alors d'après l'hypothèse de récurrence :
   $$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2X(2^{n+1}X^{n+1} + Q_{n+1}) - P_n = 2^{n+2}X^{n+2} + 2XQ_{n+1} - P_n.$$
   De plus d'après l'hypothèse de récurrence, $2XQ_{n+1}$ est un polynôme de degré au plus $n+1$, et P_n est de degré n. Donc $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - P_n$ est un polynôme de degré au plus $n+1$, donc la récurrence est prouvée.
3. Montrons par récurrence double que P_n est de la parité de n. C'est vrai aux rangs 1 et 2. De plus, si P est un polynôme qui a une parité, XP est un polynôme de parité inverse. Soit donc n tel P_n est de la parité de n et P_{n+1} est de la parité de $n+1$. Ainsi P_{n+2} est la somme d'un polynôme de la parité de n et un polynôme de la parité inverse de $n+1$, soit deux polynômes de la parité de $n+2$. Le résultat est ainsi prouvé par récurrence.
4. Raisonnons une nouvelle fois par récurrence sur $\mathbf{N}$. Il est clair que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $1(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$, et $X(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$, donc l'affirmation est vraie aux rangs 0 et 1.
   On la suppose vraie aux rangs n et $n+1$. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors $P_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$. Or $\cos(n\theta) = \cos((n+1-1)\theta) = \cos(-\theta)\cos((n+1)\theta) - \sin(-\theta)\sin((n+1)\theta)$, donc
   $$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \sin(\theta)\sin((n+1)\theta) \\ &= \cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \sin(\theta)\sin((n+1)\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$
   Ce qui achève la preuve.

Exercice 35. Soit P un polynôme réel scindé à racines simples.

1. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.
2. Montrer que si a et b sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de P alors les racines de P' sont comprises entre a et b.

Solution :

1. Soit n le degré de P. Soit $x_1 < \ldots < x_n$ les n racines du polynômes réel P scindé à racines simples. D'après le théorème de Rolle, puisque la fonction polynômiale associée à P satisfait à $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n)$, alors sa dérivée s'annule au moins au n-1 points $y_1, \ldots, y_{n-1}$ tels que $x_1 < y_1 < x_2$, $x_2 < y_2 < x_3$, …, $x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$, et donc en particulier $y_1 < \ldots < y_{n-1}$. Le polynôme P' a donc au moins $n-1$ racines différentes dans $\mathbf{R}$, or il est de degré $n-1$, donc ce sont toutes ses racines et P' est scindé à racines simples.
2. D'après la question précédente, on a $x_1 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < x_n$ ce qui répond à la question.

Exercice 36. Soit P et Q deux polynômes rationnels.

1. Montrer que $P|Q$ dans $\mathbf{Q}[X]$ si, et seulement si $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Montrer que P et Q ont le même PGCD considérés comme polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ ou dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ alors P et P' sont premiers entre eux (on dit alors que $\mathbf{Q}$ est un *corps parfait*).

Solution :

1. Si $P|Q$ dans $\mathbf{Q}[X]$, alors $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$. Réciproquement, supposons que $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$, et écrivons la division euclidienne de Q par P dans $\mathbf{Q}[X]$: il existe deux polynômes T et R de $\mathbf{Q}[X]$ avec $\deg R < \deg P$ tels que $Q = TP + R$. Mais $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$, donc il existe $S \in \mathbf{C}[X]$ tel que $Q = PS$. Donc $PS = TP + R$, c'est à dire $P(S-T) = R$. Or si $S - T$ n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(P(S-T)) \geq \deg P$, ce qui est absurde puisque $\deg R < \deg P$. Donc $S - T$ est le polynôme nul, c'est à dire que $Q = TP$, et puisque $T \in \mathbf{Q}[X]$, c'est que $P|Q$ dans $\mathbf{Q}[X]$.
2. Puisque la divisibilité est la même dans $\mathbf{C}[X]$ que $\mathbf{Q}[X]$, l'algorithme d'Euclide conduit au même résultat.
3. Soit P un polynôme irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Par définition, les seuls polynômes rationnels unitaires qui divisent P sont 1 et P. Puisque $\deg P' < \deg P$, et donc P ne divise pas P', alors $\mathrm{pgcd}_{\mathbf{Q}}(P, P') = 1$, et donc $\mathrm{pgcd}_{\mathbf{C}}(P, P') = 1$.