Mathématiques - CF Analyse 1

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Les réels Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'existence du réel $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$, appelé la *distance* de x à A.
2. Calculer $d(x, A)$ pour tout $x \in A$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$.

Solution.

1. A est non vide, donc $X = \{|x-a| : a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minoré par 0. Elle possède donc un infimum.
2. Si $x \in A$, alors pour $a = x$ on a $|x - a| = 0$. Ainsi $d(x, A) = 0$ et l'infimum est atteint.
3. Soit $a \in A$. Alors $d(x, A) \leq |x - a| \leq |x - y| + |y - a|$. Ainsi
$$d(x, A) \leq |x - y| + \inf\{|y - a| : a \in A\} = |x - y| + d(y, A).$$

Exercice 2 : Les suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$u_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) - \ln(n+1).$$

1. En appliquant le TAF à la fonction $y \mapsto \ln y$ sur une intervalle bien choisi, montrer que
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$
pour tout $x > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. En déduire qu'ils ont une limite commune. Elle est appelée la *constante d'Euler* et notée γ.
3. Calculer la limite quand $n \to \infty$ de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$
Indication : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Solution.

1. La fonction $f : y \mapsto \ln y$ est continue et dérivable su $[x, x+1]$. D'après le TAF il y a $c \in]x, x+1[$ avec
$$\frac{1}{c} = f'(c) = f'(c)\,(x + 1 - x) = \ln(x+1) - \ln x.$$
Puisque $c \in]x, x+1[$ on a $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, d'où $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
2. On a d'après la partie 1. (avec $x = n$ et puis avec $x = n + 1$) que
$$u_{n+1} - u_n = \Big(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\Big) - \ln(n+1) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) < 0, \quad \text{et}$$
$$v_{n+1} - v_n = \Big(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\Big) - \ln(n+2) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) > 0.$$
De plus
$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} (\ln n - \ln(n+1)) = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \ln 1 = 0.$$
Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes; l'après les théorème des sites adjacentes ils ont une limite commune.

3. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\\
&=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\Big)-\Big(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln 2n\Big)+(\ln n-\ln 2n)\\
&=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\Big)-\Big(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln 2n\Big)+(\ln n-\ln n-\ln 2)\\
&\to \gamma-\gamma-\ln 2=-\ln 2.\end{aligned}$$
De plus,
$$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}=\Big(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\Big)-\frac{1}{2n+1}\to -\ln 2+0=-\ln 2.$$
Donc la limite vaut $-\ln 2$.

<u>Exercice 3 : Fonctions réelles continues</u>

1. Soient $f, g : \mathbb{R}\to R$ deux fonctions réelles continues. On suppose que f est borné. Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornés.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, avec $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$. On cherche à montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f atteint un minimum sur $I_n=[-n-1,-n]\cup[n,n+1]$, disons pour $x_n\in I_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.
   (c) En déduire que la suite $(f(x_n))_n$ prend une valeur minimale, et que cette valeur est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Soit Y majornat et y minorant de $\operatorname{im} f$ (qui existent puisque f est borné). D'après le théorème du maximum g atteint un maximum M et un minimum m sur $[y,Y]$. Alors $\operatorname{im}(g\circ f)=g[\operatorname{im} f]\subseteq g|[[y,Y]]$. Donc $m\le(g\circ f)(x)\le M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et $g\circ f)$ est borné. Trivialement, $\operatorname{im}(f\circ g)\subseteq\operatorname{im} f$. Donc $y\le(f\circ g)(x)\le Y$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f\circ g$ est borné.
2. (a) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du maximum il atteint un minimum en $y_n\in[-n-1,-n]$ et un minimum en $z_n\in[n,n+1]$. Si $f(y_n)\le f(z_n)$ on pose $x_n=y_n$, sinon on pose $x_n=z_n$. Alors f atteint un minimum en x_n sur I_n.
   (b) On pose $u_{2n}=y_n$ et $u_{2n+1}=z_n$. On a $y_n\to-\infty$ et $z_n\to\infty$; puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\infty$ et $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} f(u_n)=\infty$. Or, $(x_n)_n$ est suite extraite de $(u_n)_n$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.
   (c) Soit $M=f(x_0)$. Puisque $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, il y a $N\in\mathbb{N}$ tel que $f(x_n)>M$ pour $n\ge N$. Or, $f(x)\ge f(x_n)>M$ pour tout $x\in I_n$. Ainsi $f(x)>M$ pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash]-N,N[$. D'après le théorème du maximum f atteint un minimum m sur $[-N,N]$, et $m\le M=f(x_0)$. Ainsi m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 4 : Fonctions réelles dérivables</u>

On considère la fonction $f: x\mapsto e^{-1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur R_+, notée $\bar{f}$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ pour lequel $f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ pour tout $x>0$. *Indication* : Calculer P_{n+1} en fonction de P_n.
3. Montrer que chaque $f^{(n)}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}_+$
4. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

1. Comme composition de fonctions dérivables, f est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$ avec $y = -1/x$. Puis on a $f'(x) = e^{-1/x}\frac{1}{x^2}$, ce qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{y\to -\infty} y^2 e^y = 0$$
avec $y = -1/x$, d'après les croissances comparées. D'après le théorème de la prolongation dérivable, f est prolongeable en $\bar{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec $\bar{f}(0) = 0$, et la dérivée $\bar{f}'$ est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$.

2. Par récurrence sur n. *Initialisation :* On a $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X^2$.
Hypothèse : $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ pour un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
Hérédité :
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x})' &= P_n'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}e^{-1/x} + P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}\frac{1}{x^2} \\ &= \big(P_n'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2} + P_n(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\big)e^{-1/x} = P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-1/x}, \end{aligned}$$
avec $P_{n+1}(X) = -P_n'(X)X^2 + P_n(X)X^2$.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $P_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.

3. On a $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} = \lim_{y\to -\infty} P_n(-y)e^y = 0$ d'après les croissances comparées, avec $y = -1/x$. D'après le théorème de la prolongation par continuité, $f^{(n)}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}_+$ et y est continue.

4. D'après le théorème de la prolongation dérivable, la prolongation par continuité de $f^{(n+1)}$ en 0 est la dérivée de la prolongation par continuité de $f^{(n)}$ en 0. Donc $\bar{f}$ est n-fois dérivable pour tout n, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.