Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - CF Analyse 1

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Les réels Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'existence du réel $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$, appelé la *distance* de x à A.
2. Calculer $d(x, A)$ pour tout $x \in A$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$.

Exercice 2 : Les suites
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) - \ln(n+1).$$

1. En appliquant le TAF à la fonction $y \mapsto \ln y$ sur une intervalle bien choisi, montrer que
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$
pour tout $x > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. En déduire qu'ils ont une limite commune. Elle est appelée la *constante d'Euler* et notée γ.
3. Calculer la limite quand $n \to \infty$ de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$
Indication : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 3 : Fonctions réelles continues

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to R$ deux fonctions réelles continues. On suppose que f est borné. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornés.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, avec $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. On cherche à montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f atteint un minimum sur $I_n = [-n-1, -n] \cup [n, n+1]$, disons pour $x_n \in I_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.
   (c) En déduire que la suite $(f(x_n))_n$ prend une valeur minimale, et que cette valeur est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Fonctions réelles dérivables
On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur R_+, notée $\bar{f}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ pour tout $x > 0$. *Indication* : Calculer P_{n+1} en fonction de P_n.
3. Montrer que chaque $f^{(n)}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}_+$
4. En déduire que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.