# Mathématiques - CF Algèbre 1

Documents et calculettes interdits

Corrigé

## Exercice 1 : Logique et applications

1. Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $A, A'$ deux parties de $E$ et $B, B'$ deux parties de $F$.
   (a) Montrer que
   $$(A \cap A') \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A' \times B').$$
   (b) Est-ce que la proposition précédente reste vraie si on remplace $\cap$ par $\cup$ ? Justifier la réponse.
2. Si $P$ et $Q$ sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique $\uparrow$ par $P \uparrow Q$ ssi $\neg(P \wedge Q)$ (c'est-à-dire : non ($P$ et $Q$)).
   (a) Écrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.
   (b) Si $P$, $Q$ et $R$ sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalente à $P \uparrow (Q \uparrow R)$ ?
   (c) Exprimer non$P$, ($P$ et $Q$) et ($P$ ou $Q$) uniquement à l'aide de $P$, $Q$ et du connecteur $\uparrow$.

**Solution.**

1. (a) Soit $(a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$. Donc $a \in A \cap A'$ et $b \in B \cap B'$. Ainsi $(a, b) \in A \times B$ et $(a, b) \in A' \times B'$, et $(A \cap A') \times (B \cap B') \subseteq (A \times B) \cap (A' \times B')$.
   Réciproquement, soit $(a, b) \in (A \times B) \cap (A' \times B')$. Alors $(a, b) \in (A \times B)$ et $(a, b) \in (A' \times B')$. Donc $a \in A$ et $b \in B$, et $a \in A'$ et $b \in B'$. Ainsi $a \in A \cap A'$ et $b \in B \cap B'$, et $(a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$. Ainsi $(A \times B) \cap (A' \times B') \subseteq (A \cap A') \times (B \cap B')$ et on a égalité.
   (b) Non. Soit $A = \{a\}$, $A' = \emptyset$, $B = \emptyset$ et $B' = \{b\}$. Alors $A \times B = \emptyset = A' \times B'$, mais $(A \cup A') \times (B \cup B') = \{(a, b)\}$.
2. (a)

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \uparrow Q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

   (b) Non. Si $P$ est vrai, $Q$ et $R$ faux, alors $P \uparrow Q$ est vrai, et $(P \uparrow Q) \uparrow R$ vrai. $Q \uparrow R$ est vrai, et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ est faux.
   (c) non$P$ est équivalent à $P \uparrow P$, puisque ($P$ et $P$) est équivalent à $P$. Donc ($P$ et $Q$) est équivalent à non non ($P$ et $Q$), soit non$(P \uparrow Q)$, soit $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$. Et ($P$ ou $Q$) est équivalent à non(non$P$ et non$Q$) d'après de Morgan, soit $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$.

## Exercice 2 : Les complexes

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb).$$
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Solution.**

1. Soit $(a+ib)^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Alors

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 2ab = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Ainsi $2a^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a = \pm\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. De même, $2b^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \pm\sqrt{\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Puisque $ab > 0$, on a comme racines $\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. Or, $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}$, et une racine carrée est $e^{i\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Ainsi $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. 
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb) + i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(a+kb) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(a+kb)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ib})^k = e^{ia}(1+e^{ib})^n \\ &= a^{ia}\left(2e^{ib/2}\,\frac{e^{-ib/2}+e^{ib/2}}{2}\right)^n = a^{ia}2^n e^{inb/2}\cos^n\frac{b}{2} \\ &= 2^n e^{i(a+nb/2)}\cos^n\frac{b}{2} = 2^n\cos^n\frac{b}{2}\left(\cos(a+nb/2) + i\sin(a+nb/2)\right).\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb) = 2^n\cos^n\frac{b}{2}\cos(a+\frac{nb}{2}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(a+kb) = 2^n\cos^n\frac{b}{2}\sin(a+\frac{nb}{2}).$$

3. Sont équivalents :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(z-3)(\bar{z}-3)}{(z-5)(\bar{z}-5)} &= \frac{1}{2} \\ 2(z\bar{z} - 3(z+\bar{z}) + 9) &= z\bar{z} - 5(z+\bar{z}) + 25 \\ z\bar{z} - (z+\bar{z}) + 1 &= 8 \\ (z-1)(\bar{z}-1) &= 8 \\ |z-1| &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Il s'agit donc du cercle de centre d'affixe 1 et de rayon $2\sqrt{2}$.

## Exercice 3 : Arithmétique

1. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 4\ [6] \quad \text{et} \quad x \equiv 7\ [9].$$

2. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $F_n$ et $F_{n+1}$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ pour tout entier $n > 0$.
   (c) Montrer que $F_{n+p} = F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}^*$.
   (d) En déduire que $F_n \wedge F_p = F_n \wedge F_{n+p}$.

**Solution.**

1. Le système est équivalent à $6y = x-4$ et $9z = x-7$, d'où $6y - 9z = 3$, ou encore $2y - 3z = 1$. Il y a une solution particulière évidente $y_0 = z_0 = -1$, ce qui donne $x_0 = -2$. Si $x$ est une solution quelconque, $x - x0 \equiv 0\ [6]$ et $x - x_0 \equiv 0\ [9]$, ce qui est équivalent à $6|x-x_0$ et $9|x-x_0$, soit $\text{pgcd}(6,9) = 18|x-x_0$, soit $x - x_0 \in 18\mathbb{Z}$. Donc $x \in -2 + 18\mathbb{Z}$.

2. (a) Par récurrence sur $n$. *Initialisation :* Pour $n = 0$ on a $\text{pgcd}(0,1) = 1$, donc $F_0$ et $F_1$ sont premiers entre eux.
   *Hypothèse :* On suppose $F_n$ et $F_{n+1}$ premiers entre eux.
   *Hérédité :* On a $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Donc $\text{pgcd}(F_{n+1}, F_{n+2}) = \text{pgcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
   *Conclusion :* Ainsi $F_n$ et $F_{n+1}$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Par récurrence sur $n \geq 1$.
*Initialisation :* Pour $n = 1$ on a $F_2 = 0 + 1 = 1$, et $F_2 F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$.
*Hypothèse :* $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
*Hérédité :* On a

$$\begin{aligned} F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) = F_n^2 + F_{n+1}(-F_{n-1}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

*Conclusion :* $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ pour tout entier $n > 0$.

(c) Par récurrence sur $p \geq 1$. *Initialisation :* Pour $p = 1$ on a $F_{n+1} = F_n F_0 + F_{n+1} F_1$.
*Hypothèse :* $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
*Hérédité :*

$$\begin{aligned} F_{n+p+1} &= F_{n+1+p} = F_{n+1} F_{p-1} + F_{n+2} F_p \quad \text{par hypothèse pour } n+1 \\ &= F_{n+1} F_{p-1} + (F_n + F_{n+1}) F_p = F_{n+1}(F_{p-1} + F_p) + F_n F_p = F_n F_{p+1-1} + F_{n+1} F_{p+1}. \end{aligned}$$

*Conclusion :* $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}^*$.

(d) Puisque $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$, tout diviseur commun de $F_n$ et $F_p$ divise $F_{n+p}$. Réciproquement, tout diviseur commun $d$ de $F_{n+p}$ et $F_n$ divise $F_{n+1} F_p$. Or, $F_n \wedge F_{n+1} = 1$ d'après (a). Puisque $d | F_n$, on a $d \wedge F_{n+1} = 1$ ; d'après le lemme de Gauss $d | F_p$. Ainsi $F_n \wedge F_p = F_n \wedge F_{n+p}$.

## Exercice 4 : Polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les racines réelles de $P$ sont de multiplicité paire.
   (b) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que si $S_i, T_i \in \mathbb{R}[X]$ pour $i < n$, alors il y a $U_n, V_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i<n}(S_i^2 + T_i^2) = U_n^2 + V_n^2$.
   Indication : $(S^2 + T^2)(S'^2 + T'^2) = (SS' + TT')^2 + (ST' - S'T)^2$ ; ensuite faire une récurrence.
   (d) En déduire qu'il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = U^2 + V^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $R$ le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$, donc $P = (X - 1)^2 Q + R$.
   (a) Quel est le degré de $R$ ? On posera $R = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg(P)$.
   (b) Calculer $P'$ en termes de $Q$, $Q'$ et les $a_i$.
   (c) Évaluer $P$ et $P'$ en 1 et en déduire $R$.

**Solution.**

1. (a) Soit $\beta$ une racine réelle de $P$, et supposons $P = (x - \beta)^n Q$ avec $Q(\beta) \neq 0$ et $n$ impair. Puisque $Q$ n'a qu'un nombre fini de racines, il y a $\epsilon > 0$ tel que le signe de $Q(x)$ est constant sur $]\beta - \epsilon, \beta + \epsilon[$. Or, le signe de $(1 - \beta)^n$ change en $\beta$ puisque $n$ est impair. Donc $P$ change de signe en $\beta$, ce qui contredit $P \geq 0$. Ainsi la multiplicité de toute racine réelle est paire.

   (b)
   $$\begin{aligned} (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) &= X^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) X + |\alpha|^2 = (X - \mathrm{Re}(\alpha))^2 + |\alpha|^2 - \mathrm{Re}(\alpha)^2 \\ &= (X - \mathrm{Re}(\alpha))^2 + \sqrt{|\alpha|^2 - \mathrm{Re}(\alpha)^2}^2. \end{aligned}$$

   Notons que $|\mathrm{Re}(\alpha)| < |\alpha|$, donc la racine carrée existe dans $\mathbb{R}$.

   (c) Par récurrence sur $n \geq 1$. *Initialisation :* Pour $n = 1$ on prend $U_0 = S_0$ et $V_0 = T_0$.
   *Hypothèse :* On suppose qu'il y a $U_n, V_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i<n}(S_i^2 + T_i^2) = U_n^2 + V_n^2$.
   *Hérédité :*
   $$\begin{aligned} \prod_{i<n+1} (S_i^2 + T_i^2) &= \prod_{i<n} (S_i^2 + T_i^2) \cdot (S_n^2 + T_n^2) = (U_n^2 + V_n^2)(S_n^2 + T_n^2) \\ &= (U_n S_n + V_n T_n)^2 + (U_n T_n - V_n S_n)^2. \end{aligned}$$

   *Conclusion :* L'énoncé est vrai.

(d) D'après (a) le produit $\prod_j (X-\beta_j)$ où les $\beta_i$ parcourent les racines réelles (avec multiplicité) est de la forme $Q(X)^2$. Puisque les racines dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ viennent par couple de racines conjuguées, d'après (b) le produit $\prod_i (X-\alpha_i)$ (où les $\alpha_i$ parcourent les racines complexes) est de la forme $\prod_i (S_i^2+T_i^2)$ ; d'après (c) c'est de la forme $U^2+V^2$, pour des polynômes réelles $U$ et $V$. Le coefficient dominant de $P$ doit être positif (sinon $P(a)<0$ pour $a$ suffisamment grand) et a une racine carrée $a$. Ainsi

$$P(X) = \mathrm{cd}(P) \prod_j (X-\beta_j) \prod_i (X-\alpha_i) = a^2 Q(X)^2 (U(X)^2+V(X)^2) = (aQU)^2 + (aQV)^2.$$

2. (a) Puisque $\deg(X-1)^2 = 2$ on a $\deg(R) < 2$. Ainsi $R(X) = aX+b$.
   (b) $P' = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + R' = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a$.
   (c) $3 = P(1) = R(1) = a+b$. De plus, $P'(X) = nX^{n-1}+1$, d'où $n+1 = P'(1) = a$. Ainsi $a = n+1$ et $b = 2-n$, et $R(X) = (n+1)X + 2 - n$.