Mathématiques - CF Algèbre 1

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Logique et applications

1. Soient E et F deux ensembles, A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$(A \cap A') \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A' \times B').$$
   (b) Est-ce que la proposition précédente reste vraie si on remplace $\cap$ par $\cup$? Justifier la réponse.
2. Si P et Q sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique $\uparrow$ par $P \uparrow Q$ ssi $\neg(P \wedge Q)$ (c'est-à-dire : non (P et Q)).
   (a) Écrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.
   (b) Si P, Q et R sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalente à $P \uparrow (Q \uparrow R)$?
   (c) Exprimer non$P$, (P et Q) et (P ou Q) uniquement à l'aide de P, Q et du connecteur $\uparrow$.

Exercice 2 : Les complexes

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb).$$
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 : Arithmétique

1. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système
   $$x \equiv 4 \ [6] \quad \text{et} \quad x \equiv 7 \ [9].$$
2. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ pour tout entier $n > 0$.
   (c) Montrer que $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}^*$.
   (d) En déduire que $F_n \wedge F_p = F_n \wedge F_{n+p}$.

Exercice 4 : Polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
   (b) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que si $S_i, T_i \in \mathbb{R}[X]$ pour $i < n$, alors il y a $U_n, V_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i<n}(S_i^2 + T_i^2) = U_n^2 + V_n^2$.
   Indication : $(S^2+T^2)(S'^2+T'^2) = (SS'+TT')^2 + (ST'-S'T)^2$; ensuite faire une récurrence.
   (d) En déduire qu'il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = U^2 + V^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit R le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$, donc $P = (X-1)^2 Q + R$.
   (a) Quel est le degré de R ? On posera $R = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg(P)$.
   (b) Calculer P' en termes de Q, Q' et les a_i.
   (c) Évaluer P et P' en 1 et en déduire R.