$$\boxed{q(x) = \sum_i d_i f_i(x)^2}$$

$(f_1, \dots, f_n)$ base de $E^*$

$(e_1, \dots, e_n)$ base contraduale

Base orthogonale

$$\overset{i \neq j}{e_i \perp e_j} \iff q(e_i + e_j) = q(e_i) + q(e_j)$$

$$q(e_i + e_j) = \sum_k d_k f_k(e_i + e_j)^2$$

$$f_k(e_i + e_j) = f_k(e_i) + f_k(e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \text{ et } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = i \ (k \neq j) \\ 1 \text{ si } k = j \ (k \neq i) \end{cases}$$

$q(e_i + e_j) = d_i + d_j$ mais $q(e_i) = d_i$ $\quad q(e_j) = d_j$

donc on a bien $q(e_i + e_j) = q(e_i) + q(e_j)$

Matrice de $q$

$\phi(e_1, e_1) = q(e_1) = d_1$

$$\begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \ddots & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + \dots + 10x_4^2$

• Il y a des termes

On choisit un terme carré : $x_1^2$

On prend les termes avec $x_1$ :

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4$$

$$= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4)$$

Identité : $x^2 + 2xa = (x+a)^2 - a^2$

$$= \underbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2}_{f_1(x)^2} - (-x_2 + 2x_3 - x_4)^2$$

$$- (x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 \dots)$$

Identité : $(a_1 + \dots + a_s)^2 = \sum \text{carrés} + 2\sum \text{rectangles}$

On reporte dans l'expression

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2$$

$$4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4$$
$$= 4(x_2^2 - x_2x_3 + 3x_2x_4) = \cdots$$

On trouve après calcul

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4\right)^2$$
$$+ 2x_3x_4$$

Identité : $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$

Conclusion : 

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 1/2 & -1/2 \end{array}$$
$$q(x) = f_1(x)^2 + 4f_2(x)^2 + \frac{1}{2}f_3(x)^2 - \frac{1}{2}f_4(x)^2$$

avec $f_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$ $\quad f_2(x) = x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4$

$f_3(x) = x_3 + x_4$ $\quad f_4(x) = x_3 - x_4$ $\quad$ $f_1, f_2, f_3, f_4$ indépendants

signature $q$ : $(3,1)$ (rang $q = 4$)

$\hookrightarrow$ non dégénérée

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4$$

. Il n'y a <u>pas de termes carrés</u>

On choisit un terme rectangle : $x_1x_2$

On regarde les termes avec $x_1$ ou $x_2$

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4$$

$$= \underset{a}{x_1}\,\underset{b}{x_2} + x_1(\underbrace{2x_3 - x_4}_{u}) + x_2(\underbrace{x_3 + 3x_4}_{v})$$

Identité : $ab + au + bv = (a+v)(b+u) - uv$

$$= (x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4) - (2x_3 - x_4)(x_3 + 3x_4)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\overbrace{x_1 + x_2 + 3x_3}^{f_1} + 2x_4\Big)^2$$

$$- \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4)^2 - \ldots$$

$f_2$

On remplace

$$q(x) = \frac{1}{4} f_1(x)^2 - \frac{1}{4} f_2(x)^2 - 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2$$

$$q(x) = \frac{1}{4} f_1(x)^2 - \frac{1}{4} f_2(x)^2 - 2(\underbrace{x_3 - x_4}_{f_3})^2 + 5\underbrace{x_4}_{f_4}{}^2$$

signature $(2,2)$