Si $x \neq y$ $\quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

1. f admet au plus un pt fixe $\swarrow$ distincts

Soient z et z' deux points fixes de f alors

$$\underbrace{d(f(z), f(z'))}_{=\, d(z,z')} < d(z,z')$$

Contradiction

Donc il y a au plus un point fixe

2. Montrer : $\exists z \in X$ tq $d(z,f(z)) \leq d(x,f(x)) \ \forall x \in X$

On pose $\phi(x) = d(x,f(x))$, $\phi : X \to \mathbb{R}$ $\quad$ spdg $\phi(x) \geq \phi(y)$

On montre que ϕ est continue (et même Lips.)

$$|\phi(x) - \phi(y)| = d(x,f(x)) - d(y,f(y))$$

$$\leq d(x,y) + \cancel{d(y,f(y))} + d(f(y),f(x)) - \cancel{d(y,f(y))} \qquad d(f(y),f(x)) \leq d(x,y)$$

$$\leq 2\,d(x,y)$$

Puisque X est compact, ϕ est bornée et les bornes sont atteints : il existe $z \in X$ tel que $\forall x \in X$, $\phi(z) \leq \phi(x)$

3. Montrer z point fixe :

Supposons $f(z) \neq z$, alors $(x = f(z), y = z)$

$$\underbrace{d(f(f(z)), f(z))}_{\phi(f(z))} < \underbrace{d(f(z), z)}_{\phi(z)}$$

Contradiction !

donc $f(z) = z$

4. $x_0 \in X$, (x_n) avec $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \geq 0)$

Montrer que $(d(x_n, z))_n$ converge vers $\ell \geq 0$.

On a $d(x_n, z) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$,

et $d(x_{n+1}, z) = d(f(x_n), f(z)) \leq d(x_n, z)$

donc la suite $(d(x_n, z))_n$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle est convergente.

On note ℓ sa limite.

5. On montre que $l=0$

Supposons que $l>0$.

Puisque X est compact, (x_n) admet une sous-suite convergente : $(x_{s(n)})$ avec $x_{s(n)} \to y$. Par la question précédente, on a $d(x_{s(n)}, z) \longrightarrow l$ d'où $d(y,z)=l$.
(d continue)

On considère la sous-suite $(x_{s(n)+1})$ $\left[x_{s(n)+1} = f(x_{s(n)})\right]$

Comme f est continue (f est lips.), cette suite est convergente de limite $f(y)$ et on a aussi $d(f(y),z)=l$.

Comme $l>0$,
on a $z \neq y$ donc $\underset{l}{\underset{\shortparallel}{d(f(y),z)}} < \underset{l}{\underset{\shortparallel}{d(y,z)}}$ contradiction

donc $l=0$ et $z=y$.