Calculer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2\,dx = A$$

$E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

$A = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \langle x^2-f, x^2-f\rangle$ avec $f = ax+b$

$f\in H = \mathrm{Vect}(1,x)$

$= \inf\limits_{f\in H} \|x^2-f\|^2 = \|x^2-f_0\|^2$ avec f_0 projeté orthogonal de x^2 sur H

On fait Gramm-Schmidt sur $(1,x)$

$a_1=1,\ a_2=x$

$\|f_1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dx = 1$

- $f_1 = a_1 = 1$

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\|f_1\|}f_1 = 1}$$

- $f_2 = a_2 - \dfrac{\langle f_1,a_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = x - 1/2$ $\quad \left\lfloor \langle f_1,a_2\rangle = \displaystyle\int_0^1 1\times x\,dx = 1/2 \right.$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^1 (x-1/2)^2\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \boxed{e_2 = 2\sqrt{3}\,(x - 1/2)}$$

Projeté orthogonal :

$$f_0 = \langle x^2, e_1\rangle e_1 + \langle x^2, e_2\rangle e_2 = x - 1/6$$

Conclusion :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2\,dx = \frac{1}{180}$$