1. H sous-groupe d'indice 2 des G. Montrer $H \trianglelefteq G$

On a $G/H = \{H, xH\}$ puisque $x \notin H$

et de même $H\backslash G = \{H, Hx\}$

$G = H \cup xH = H \cup Hx \Rightarrow xH = Hx$ $\forall x \notin H$

↑ union disjointe

d'où $xH = Hx \quad \forall x \in G$

d'où $H \trianglelefteq G$

2. G fini, p plus petit premier diviseur $|G|$

H sous-groupe d'indice p. On montre : $H \trianglelefteq G$

Action $G \curvearrowright G/H$ par mult. à gauche

$G/H = \{xH, x \in G\}$

$g \in G, xH \in G/H \quad g \cdot xH = gxH$

2.1. Action transitive.

$xH, yH \in G/H$, on veut $g \in G$ $g \cdot xH = yH$

on prend $gx = yx^{-1}$

2.2 K noyau de l'action. Montrer $K \subseteq H$

$k \in K$ ssi $k \cdot xH = xH$ $\forall x$

en particulier $eH = H$ d'où $k \in H$ et $K \subseteq H$

$(x = e)$

2.3 Montrer que G/K iso. sous-groupe de S_p

On numérote les classes de $G/H = \{C_1, \dots C_p\}$

Il y a p car l'indice de H dans G est p.

Pour $g \in G$, on définit $\pi_g : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$

par $g \cdot C_i = C_{\pi_g(i)}$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

π permutation

$G \xrightarrow{\phi} S_p$ morphisme de noyau K

$g \mapsto \pi_g$

d'où $G/K \simeq \mathrm{Im}\,\phi$ ← sous-groupe de S_p

2.4 Donc $|G/K|$ divise $p! = 1 \times 2 \times \cdots \times p$

d'où $|G/K| = p$ car p plus petit premier divisant $|G|$

d'où $\dfrac{|G|}{|K|} = p = \dfrac{|G|}{|H|}$ d'où $|H| = |K|$

et $K \subseteq H$

d'où $K = H$

et donc $H \lhd G$

(car $K \lhd G$)

noyau