Fonction φ d'Euler

$$\varphi(n) = \left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*\right|$$

Si $PGCD(n, m) = 1$, $\left(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}\right)^* \simeq \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^* \times \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^*$

Si $(n, m) = 1$, $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Si p premier $\varphi(p) = p - 1 = \text{card}\{0 \leq a \leq p-1 \text{ tq } (a, p) = 1\}$

plus généralement $e \geqslant 1$ $\varphi(p^e) = p^{e-1}(p-1)$

$$= \text{card}\{0 \leq a \leq p^e - 1 \text{ tq } \underbrace{(a, p^e) = 1}_{\Updownarrow \; p \nmid a}\}$$

$= p^e - \mathrm{card}\{0 \leq a \leq p^e - 1 \mid \underbrace{\quad}_{p \mid a}\}$

$\cdots$

Calcul

$$\boxed{\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$