On construit $A \subseteq \mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable

1. $B \subseteq \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in B$ tq $x - b \in \mathbb{Q}$. $\rightarrow x \in B + \mathbb{Q}$

Montrer : si B est mesurable alors $\lambda(B) > 0$

On a $\boxed{\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + B)}$

union dénombrable

donc $\underset{+\infty}{\underset{\|}{\lambda(\mathbb{R})}} \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(q+B) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(B)$

$\Downarrow$

$\lambda(B) \neq 0$

2. $B \subseteq [0;1]$ tq $\forall x, y \in B$, $x \neq y \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$.

Montrer : si B est mesurable alors $\lambda(B) = 0$

On montre qu'il existe un ensemble de translatés de B

dénombrable et inclus dans $[0;2]$.

On pose $D = [0;1] \cap \mathbb{Q}$ et on considère

dénombrable

les translatés $d+B$ avec $d\in D$. Clairement, ils sont inclus dans $[0;2]$. Soient $d,d'\in D$ avec $x\in (d+B)\cap(d'+B)$ disons $x=d+b=d'+b'$ alors $b-b'=d'-d\in\mathbb{Q}$
donc $d=d'$ d'où les $d+B$, $d\in D$, sont ddd.

On a $$\lambda\Big(\bigcup_{d\in D} d+B\Big)\leq \lambda([0;2])=2$$

$$\| \quad \sum_{d\in D}\lambda(B)$$ donc $\lambda(B)=0$

3. Une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant 1. et 2. n'est pas mesurable.

On construit une telle partie de $\mathbb{R}$.

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation d'équivalence :

Soit $x,y\in\mathbb{R}$, $x\sim y$ si $x-y\in\mathbb{Q}$.

On prend pour B un système de représentants contenus dans $[0;1]$ de chaque classe (axiome du choix)