

# Equations différentielles

1. Premiers résultats
2. Théorie de Cauchy-Lipschitz
3. Equations différentielles linéaires

## §2.1 Equations différentielles – Premiers résultats

### Définition

Une **équation différentielle** (résolue d'ordre 1) est une équation en la fonction  $y$  de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \quad (\text{E})$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ),  
 $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue.  $f$  est le **champ de vecteurs** de (E).

Une **solution** de  $E$  est  $(y, J)$  avec  $J$  ouvert contenue dans  $I$ ,  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  dérivable avec,  $\forall t \in J$ ,  $y(t) \in U$  avec  $f(t, y(t)) = y'(t)$ . La solution est **globale** si  $I = J$ . La solution est **maximale** s'il n'existe pas de solution  $(\tilde{y}, \tilde{J})$  avec  $J \subsetneq \tilde{J}$  et  $\tilde{y}(t) = y(t)$  pour tout  $t \in J$ .

Si  $f(t, y(t)) = f(y(t))$  alors l'équation est **autonome**

### Théorème

*Toute solution se prolonge en une solution maximale (mais pas nécessairement de manière unique)*

## Réduction à l'ordre 1.

L'équation différentielle d'ordre  $n$

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in I$$

avec  $f : I \times U^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  est équivalente à l'équation d'ordre 1

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad t \in I$$

avec  $Y$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^d)^n \cong \mathbb{R}^{dn}$  et

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, X) \end{pmatrix} \quad \text{pour } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

La solution  $y$  correspondant à la solution  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ .

## Théorème (équations linéaires d'ordre 1)

*On considère l'équation*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I \quad (E)$$

*avec  $I$  intervalle ouvert,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues. Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $a$  admet une unique primitive  $A$  qui s'annule en  $t_0$  donnée par*

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

*L'équation homogène  $y'(t) = a(t)y(t)$  admet une unique solution globale vérifiant  $y(t_0) = y_0$  donnée par*

$$y(t) = y_0 e^{A(t)}$$

*L'équation (E) admet une unique solution globale vérifiant  $y(t_0) = y_0$  donnée par*

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds$$

## Equations différentielles linéaires du premier ordre

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \quad (1)$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues sur  $I$  données, et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue.

1. Soit  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $y$  définie sur  $I$  par :

$$\forall t \in I, y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma) d\sigma} f(s) ds \quad (2)$$

est solution de (1) sur  $I$  et vérifie  $y(t_0) = y_0$ .

2. Retrouver cette formule (formule de Duhamel) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Donner la solution maximale au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3}, & t \in ]0, +\infty[ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

## Théorème (lemme de Gronwall)

Soient  $I$  intervalle,  $t_0 \in I$ ,  $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues avec  $a$  positive telles que  $\forall t \in I, t \geq t_0$ , on a  $y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(s)y(s) ds$ . Alors, on a

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t b(s) a(s) e^{\int_s^t a(u) du} ds$$

Si, de plus,  $b(t) = b$  est une fonction constante, on a

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad y(t) \leq b e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

## Théorème (lemme de Gronwall – Forme différentielle)

Soient  $I$  intervalle,  $t_0 \in I$ ,  $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues avec  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\forall t \in I$ , on a  $y'(t) \leq b(t) + a(t)y(t)$ . Alors, on a

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad y(t) \leq y(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(u) du} ds$$

## §2.2 Théorie de Cauchy-Lipschitz

### Définition

Soient  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Une **problème de Cauchy** est un système d'équations

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in U$  sont fixés.

Une **solution** de ce problème est une fonction  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  avec  $J \subseteq I$  ouvert contenant  $t_0$ ,  $y$  dérivable sur  $J$  et vérifiant le système.

## Définition

$f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  est **localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état** si  $\forall (t, x) \in I \times U$ , il existe  $J \subseteq I$  ouvert contenant  $t$ ,  $V \subseteq U$  ouvert contenant  $x$  et  $L \geq 0$  tels que

$$\forall s \in J, \forall y, z \in V, \|f(s, y) - f(s, z)\| \leq L \|y - z\|$$

## Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soient  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  
Supposons que  $f$  est continue sur  $I \times U$  et  $f$  localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors, pour tout  $(t_0, y_0) \in I \times U$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un ouvert  $J \subseteq I$ .  
En particulier, les hypothèses sont vérifiées si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Résultat.** Deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper



## Théorème (Explosion en temps fini)

Soient  $I = ]a, b[$  ouvert et  $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifiant Cauchy-Lipschitz.  
Soit  $y$  solution maximale de  $y'(t) = f(t, y(t))$  définie sur l'ouvert  $]a, \beta[$ .  
Alors, on a

- ▶ Si  $\beta < b$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$
- ▶ Si  $a < \alpha$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty$

**Résultat.** Si  $f$  est bornée alors les solutions maximales sont globales

## Corollaire

Supposons  $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et **globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état**, c'est-à-dire il existe  $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue telle que  $\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ , on a  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k(t) \|x - y\|$ .

Alors toute les solutions maximales sont globales.

### Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Construire une solution non nulle.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

### Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)^2 + \frac{2}{t}y(t), & t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle ouvert  $J$ .
2. Montrer que, pour tout  $t \in J$ ,  $y(t) \neq 0$ .
3. On définit  $z : J \rightarrow \mathbb{R}$  par  $z(t) = 1/y(t)$ . Montrer que  $z$  est solution sur  $J$  de l'équation différentielle

$$z'(t) = -\frac{2}{t}z(t) + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation précédente.
5. En déduire l'intervalle  $J$  et une expression explicite pour la solution  $y$ .

### Exercice.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^\times$ ,  $xf(x) < 0$ . Soit  $y_0 > 0$ . On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

1. Montrer que le problème (??) admet une unique solution maximale  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle ouvert  $J$ .
2. Montrer que la fonction  $t \mapsto y(t)^2$  est décroissante sur  $J$ .
3. En déduire que l'intervalle  $J$  contient  $[0; +\infty[$  et qu'il existe  $\ell \geq 0$  tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)^2 = \ell$ .
4. On veut montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . On suppose par l'absurde que  $\ell > 0$ .
  - 4.1 Montrer que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $y(t) > 0$  et que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sqrt{\ell}$ .
  - 4.2 En déduire que  $y'(t)$  admet une limite quand  $t \rightarrow +\infty$  puis que  $f(\sqrt{\ell}) = 0$ .
  - 4.3 Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $xf(x) \leq -\alpha x^2$ . Montrer que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$ .

## §2.3 Equations différentielles linéaires

### Définition

Soient  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A : I \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continues. Une **équation différentielle linéaire** est de la forme

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad (L)$$

Cette équation est **homogène** si  $b = 0$ , c'est-à-dire

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (L_H)$$

$(L_H)$  est l'**équation homogène** associée à  $(L)$

### Théorème

- ▶ *Le problème de Cauchy correspondant à  $(L)$  admet une unique solution maximale et cette solution est globale*
- ▶ *L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de  $(L_H)$  est un sev de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$  de dim.  $d$ . (L'application  $y \mapsto y(t_0)$  est un iso. entre  $\mathcal{S}_H$  et  $\mathbb{R}^d$ )*
- ▶ *L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(L)$  est de la forme  $y + \mathcal{S}_H$  avec  $y \in \mathcal{S}$  (espace affine de direction  $\mathcal{S}_H$ )*

## Définition

Une base de  $\mathcal{S}_H$  est un **système fondamental de solution** de  $(L_H)$ . Soit  $(\phi_1, \dots, \phi_d)$  une telle base, la matrice  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_d(t))$  est la **matrice fondamentale** et son déterminant est le **wronskien**.

## Théorème

- ▶ Une famille  $(y_1, \dots, y_k)$  de solutions de  $(L_H)$  est libre ssi  $\exists t_0 \in I$  tel que  $(y_1(t_0), \dots, y_k(t_0))$  est libre ssi  $\forall t \in I$  tel que  $(y_1(t), \dots, y_k(t))$  est libre. En particulier,  $(\phi_1, \dots, \phi_d)$  est un système fondamental de solution ssi son wronskien ne s'annule jamais.
- ▶ Le wronskien  $w$  est solution de  $w'(t) = \text{Tr}(A(t)) w(t)$  et donc

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds}$$

## Théorème (équation linéaire à coefficient constant)

Soit  $A \in M_d(\mathbb{R})$ . La solution maximale du système  $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et égale à

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$$

**Note.** Pour l'équation non homogène  $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ , on cherche une solution de la forme  $e^{tA} v(t)$  (variation de la constante)

## Définition

Soit  $M \in M_d(\mathbb{R})$ , l'exponentielle de la matrice  $M$  est  $e^M = \sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}$

## Résultat.

- ▶ Si  $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  alors  $e^M = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$
- ▶ Soit  $P$  inversible alors  $e^{PMP^{-1}} = Pe^M P^{-1}$
- ▶ Si  $M$  et  $N$  commutent alors  $e^M$  et  $e^N$  commutent et  $e^{M+N} = e^M e^N$
- ▶ L'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable de dérivée  $A e^{tA}$

## Théorème

On considère le cas  $d = 2$ . Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Les solutions de l'équation  $y'(t) = Ay(t)$  sont

- ▶ Si  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  avec une base de vecteurs propres  $(v_1, v_2)$  de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  :

$$\mu_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

- ▶ Si  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais non sur  $\mathbb{R}$ , les valeurs propres sont  $\lambda, \bar{\lambda}$ ; soit  $v$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on écrit  $v = v_1 + iv_2$  avec  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$e^{\alpha t} (\mu_1 (\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) + \mu_2 (\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1)), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

- ▶ Si  $A$  n'est pas diagonalisable avec unique valeur propre  $\lambda$  avec  $v_1$  vecteur propre et  $v_2$  tel que  $(A - \lambda I)v_2 = v_1$  :

$$\mu_1 e^{\lambda t} v_1 + \mu_2 (te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

### Exercice.

Exprimer l'équation différentielle suivante :

$$y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$$

comme un système d'équations linéaires d'ordre 1 à 3 inconnues. Puis, résoudre ce système.