

# Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces pré-hilbertiens
4. Décompositions
5. Normes matricielles

## §1. Dualité

**Notations.**  $E$  espace-vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Une **forme linéaire** est application linéaire  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$

L'ensemble des formes linéaires  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est le **dual** de  $E$ , c'est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  aussi.

**Résultats.**

- ▶ Une forme linéaire est nulle ou surjective.
- ▶ Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan (dim.  $n - 1$ ) et la réciproque est aussi vraie.
- ▶ Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Les applications  $e_1^*, \dots, e_n^* : E \rightarrow \mathbb{K}$  telles que,  $\forall x \in E$ ,

$$x = e_1^*(x) e_1 + \dots + e_n^*(x) e_n$$

sont des formes linéaires. La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  appelée la base **duale** de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

### Théorème

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors,  $e_i^*$  est l'unique élément de  $E^*$  tel que, pour tout  $j$ , on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

### Théorème

Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$ . Il existe une unique base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  avec  $f_i = e_i^*$ ,  $\forall i$ . On l'appelle la base **antiduale** de la base  $(f_1, \dots, f_n)$ .

## §2. Formes bilinéaires et formes quadratiques

**Forme bilinéaire** : application  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire par rapport à chaque variable. L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension  $n^2$ .

Sur  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , base de  $E$ , on écrit  $x = \sum_i x_i e_i$ , et  $y = \sum_i y_i e_i$ .  
On a

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \phi(e_i, e_j) = {}^t X A Y$$

avec  $A = (\phi(e_i, e_j)) \in M_n(\mathbb{K})$ , **matrice représentant  $\phi$  sur la base  $\mathcal{B}$** ,  
 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  (resp.  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ ) le **vecteur représentant  $x$  (resp.  $y$ ) sur la base**.

Soit  $\mathcal{B}'$  une autre base  $E$ , la matrice  $A'$  de  $\phi$  sur la base  $\mathcal{B}'$  vérifie

$$A' = {}^t P A P$$

avec  $P$  la **matrice de changement de base** de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

**Remarque.**  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$ . (**Attention.** notation !)

Soit  $\phi$  une **forme bilinéaire symétrique (fbs)**, c'est-à-dire  $\forall x, y$ ,  
 $\phi(x, y) = \phi(y, x) \iff$  la matrice de  $\phi$  (dans toute base) est symétrique.

Pour  $x, y \in E$ , on dit  $x$  et  $y$  **orthogonaux**, noté  $x \perp_{\phi} y$ , si  $\phi(x, y) = 0$ .

Pour  $S \subseteq E$ , on pose  $S^{\perp_{\phi}} = \{x \in E \mid \forall y \in S, \phi(x, y) = 0\}$ . C'est toujours un sev de  $E$ .

On note  $\text{Ker } \phi = E^{\perp_{\phi}}$ , c'est le **noyau** de  $\phi$ .

Le **rang** de  $\phi$  est  $\dim E - \dim \text{Ker } \phi$ .

## Lemme

*Soit  $A$  matrice de  $\phi$  dans une base, alors  $\text{Ker } \phi = \text{Ker } A$ .*

## Théorème

*Il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  qui est orthogonale pour  $\phi$ , c'est-à-dire telle que  $e_i \perp_{\phi} e_j$  pour tout  $i \neq j$ .*

## Corollaire

*Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice symétrique, alors il existe  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  ${}^tQAQ$  est diagonale*

### Exercice.

Soit la forme bilinéaire  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  définie sur la base canonique par :

$$\phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

1. Calculer  $\phi(z, w)$  avec  $z = (2, -1, 0)$  et  $w = (5, 15, 1)$ .
2. Écrire la matrice de  $\phi$  dans la base canonique. Calculer  $\text{Ker } \phi$ , puis son rang.
3. Écrire la matrice de  $\phi$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3)$  où  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1)$ .
4. Calculer l'orthogonal  $v_1^\perp$ .

**Vocabulaire.** Soit  $\phi$  une fbs. On définit son **rang** par  $\dim E - \dim \text{Ker } \phi$ .  
On dit que  $\phi$  est

- ▶ **positive** si  $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ ).
- ▶ **négative** si  $\forall x \in E, \phi(x, x) \leq 0$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ ).
- ▶ **définie** si  $\phi(x, x) = 0 \implies x = 0$ .
- ▶ **non dégénérée** si  $\text{Ker } \phi = \{0\}$  (et **dégénérée** sinon).

## Lemme

*Si  $\phi$  est un fbs définie alors  $\phi$  est non dégénérée.*

**Exercice.** Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$\phi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$$

est une fbs non dégénérée et non définie.

**Forme quadratique.** Application de  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$  telle qu'il existe une forme bilinéaire  $\phi$  sur  $E$  avec  $q(x) = \phi(x, x)$  pour tout  $x \in E$ . Sous forme matricielle, on a

$$q(x) = {}^t X A X.$$

## Théorème

Soit  $q$  forme quadratique, alors il existe une **unique** fbs  $\phi$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) = \phi(x, x)$ . On l'appelle la **forme polaire** de  $q$ .

Pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

De plus, l'application  $q \mapsto \phi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev donc l'ev des formes quadratiques est isomorphe à l'ev des matrices symétriques  $n \times n$ .

**Forme polynômiale.** L'expression  $q(x)$  est un polynôme quadratique homogène en les  $x_1, \dots, x_n$ . On peut déduire l'expression de  $\phi(x, y)$  (comme polynôme linéaire homogène en les  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ) par

$$ax_i^2 \rightsquigarrow ax_i y_i \quad \text{et} \quad ax_i x_j \rightsquigarrow \frac{1}{2} ax_i y_j + \frac{1}{2} ax_j y_i \quad (i \neq j)$$



**Vocabulaire.** Une forme quadratique hérite de la terminologie de la fbs associée : rang, positive, négative, dégénérée, noyau, orthogonalité, etc.

**Attention.**  $\text{Ker } q = \text{Ker } \phi$  et non  $\{x \in E \mid q(x) = 0\}$  (pas sev en général).

**Orthogonalité.**  $x \perp_q y \iff x \perp_\phi y \iff q(x+y) = q(x) + q(y)$ .

## Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit  $q$  forme quadratique sur  $\mathbb{R}$ . Il existe un couple d'entiers  $(s, t)$ , appelé la **signature** de  $q$ , tel que, dans toute base orthogonale  $(e_1, \dots, e_n)$  pour  $q$ , on a

▶  $s = \#\{i : q(e_i) > 0\}$

▶  $t = \#\{i : q(e_i) < 0\}$

De plus  $s + t$  est le rang de  $q$  et donc  $\dim \text{Ker } q = \#\{i : q(e_i) = 0\}$ .

**Réduction des formes quadratiques.** Soient  $q$  forme quadratique et  $\mathcal{B}$  une base. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La base  $\mathcal{B}$  est  $q$ -orthogonale,
2. La matrice de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale,
3. L'expression de  $q$  sur la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$q(x) = \sum_i d_i f_i(x)^2$$

avec  $(f_1, \dots, f_n)$  base de  $E^*$ .

**Théorème.** Une telle base existe toujours.

**Remarques.** Les bases  $\mathcal{B}$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  sont duales et la matrice de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on peut prendre  $d_i \in \{0, \pm 1\}$ ; si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $d_i \in \{0, 1\}$ .

## Réduction de Gauss.

Réduire les formes quadratiques suivantes :



$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$



$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$

### §3. Espaces euclidiens, espaces pré-hilbertiens

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (espaces euclidiens) ou  $\mathbb{C}$  (espaces pré-hilbertiens complexes)

Une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  est **produit scalaire** (resp. **hermitien**) si elle est linéaire à gauche, définie positive et

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

On en déduit l'existence d'une **norme** :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  :

- ▶  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,
- ▶  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  pour tous  $x \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,
- ▶  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tout  $x, y \in E$ .

#### Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

## Proposition

Soit  $F$  sev de  $E$ , alors  $E = F \oplus F^\perp$ . En particulier, tout  $x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in F^\perp$ . Le vecteur  $y$  est le *projeté orthogonal* de  $x$  sur  $F$ .

## Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit  $(a_1, \dots, a_n)$  une base de  $E$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on pose

$$f_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle f_j, a_i \rangle}{\|f_j\|^2} f_j \quad \text{et} \quad e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i.$$

Alors la base  $(f_1, \dots, f_n)$  est orthogonale et la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est *orthonormée*. De plus, pour  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$\text{Vec}(a_1, \dots, a_k) = \text{Vec}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vec}(e_1, \dots, e_k).$$

## Corollaire

Soit  $(u_1, \dots, u_t)$  une base orthonormée de  $F$ . Alors le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est

$$\sum_{i=1}^t \langle x, u_i \rangle u_i.$$

L'application linéaire  $E \rightarrow F$  qui envoie  $x$  sur son projeté orthogonal  $p_F(x)$  est appelé un **projecteur orthogonal**.

**Problème de minimalisation.** Soit  $x \in E$ , il existe un unique point  $y \in F$  tel que la distance  $\|x - y\|$  est minimale, c'est le projeté orthogonal  $p_F(x)$  sur  $F$ .

**Calcul du projecteur orthogonal.** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et soit  $(u_1, \dots, u_t)$  une base orthonormée de  $F$ . Soient  $U_1, \dots, U_t$  les vecteurs colonnes des coordonnées de  $u_1, \dots, u_t$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors la matrice de  $p_F$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\sum_{i=1}^t U_i {}^t U_i.$$

Réciproquement, une matrice  $M$  telle que  $M$  est symétrique et  $M^2 = M$  est un projecteur orthogonal.

## Diagonalisation des endomorphismes normaux.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces euclidiens / pré-hilbertiens complexes de dim. finie. Pour  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , il existe un unique  $u^* \in \mathcal{L}(F, E)$ , appelé **adjoint** de  $u$ , tels que  $\forall x \in E, y \in F$

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E.$$

La matrice  $A^*$  de  $u^*$  (après choix de bases) est  $A^* = {}^t \bar{A}$  avec  $A$  matrice de  $u$ .

Une matrice  $A$  est

- ▶ **hermitienne** ou **auto-adjointe** si  $A = A^*$  (= symétrique pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).
- ▶ **unitaire** ou **orthogonale** si  $A^{-1} = A^*$
- ▶ (dans le cas carré) **normale** si  $AA^* = A^*A$ .

**Remarque.** Une matrice **orthogonale** est une matrice de changement de bases entre deux bases orthonormées.

## Théorème (Théorème spectral)

*Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme est scindé dans  $\mathbb{K}$ . Alors la matrice  $A$  est normale ssi elle est diagonalisable dans une base orthonormale ssi il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^{-1} A U$  est diagonale.*

*En particulier, une matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.*

*Et, dans le cas complexe,  $A$  est hermitienne ssi ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale.*

## Corollaire

*Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  matrice hermitienne. Alors  $A$  est positive (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*



**Exercice.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille d'éléments de vecteur de  $E$ , espace euclidien de dimension finie, tous de norme 1. Montrez qu'on a, pour tout  $x \in E$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2,$$

si et seulement si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Exercice.** Calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

**Exercice.**

1. Montrer que toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.
2. Montrer que  $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$  est égal à la plus grande valeur propre de sa partie symétrique.
3. Maximiser la quantité  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$  avec les contraintes

$$\begin{cases} a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}, \\ a_1^2 + \dots + a_4^2 = 1 \end{cases}$$

## §4. Décompositions

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  admet une **décomposition LU** s'il existe une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  avec des 1 sur la diagonale telles que  $A = LU$ .

### Théorème

*Supposons  $A$  inversible. Alors il existe une matrice de permutations  $P$  telle que  $PA$  admet une unique décomposition  $LU$ .*

*Si  $A$  est symétrique définie positive, alors  $A$  admet une unique décomposition  $LU$ .*

Utilisations. résolution de systèmes linéaires avec membres de droite différents, inversion de matrices, calculs de déterminants, etc.

**Méthode.** On fait un pivot de Gauss pour mettre sous forme triangulaire supérieure (en mettant le pivot égal à 1 à chaque fois). Les transformations effectuées donnent la matrice  $L$ . Si un pivot est nul, on échange les lignes pour avoir un pivot non nul (ce qui donne  $P$ ).

Une matrice  $A$  admet une **décomposition QU (ou QR)** s'il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telles que  $A = QU$ .

Particulièrement utile quand  $A$  est rectangle pour calculer le pseudo-inverse de  $A$  :

$$AX = Y \iff UX = {}^t QY$$

**Méthode.** On fait la méthode de Gram-Schmidt sur les colonnes  $a_j$  de  $A$ . La base orthonormée  $(e_j)$  obtenue donne la matrice  $Q$ . La matrice  $R$  a pour entrées  $\langle e_i, a_j \rangle$  pour  $i \leq j$  (et zéro ailleurs).

**Remarques.** La méthode est plus coûteuse que la méthode LU et susceptible aux problèmes d'arrondis dans Gram-Schmidt.

C'est la base de la méthode QR pour le calcul (d'approximations) des valeurs propres.

Exercice.

- ▶ Calculer la décomposition LU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calculer la décomposition QU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

## Lemme

Soit  $A$  une matrice (non nécessairement carrée). Alors, la matrice  $A^*A$  est hermitienne positive. En particulier, ses valeurs propres sont des réels positifs. On appelle **valeurs singulières** de  $A$  les racines carrées des valeurs propres de  $A^*A$ .

**Remarque.** si  $A$  est déjà hermitienne, on obtient les modules de ses valeurs propres.

**Décomposition en valeurs singulières.** Supposons que  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  admette  $r$  valeurs singulières non nulles  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_r$ . Alors, il existe deux matrices unitaires  $U \in M_n(\mathbb{K})$  et  $V \in M_m(\mathbb{K})$  telles que

$$A = V\hat{D}U^* \text{ avec } \hat{D} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

avec  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ .

## §5. Normes matricielles

**Rappel.** Puisque  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, toutes les normes sur  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  sont équivalentes.

On dit qu'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $M_n(\mathbb{K})$  est une **norme matricielle** si

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Pour  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ , la **norme de Frobenius** définie par

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

est une norme matricielle. C'est une conséquence de Cauchy-Schwarz.

La norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par  $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}|$  n'est pas une norme matricielle.

Pour  $\|\cdot\|$  une norme fixée de  $\mathbb{K}^n$ , la **norme subordonnée** est la norme  $\|\cdot\|$  de  $M_n(\mathbb{K})$  définie par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

## Proposition

Soit une norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{K}^n$ , on a

1.  $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \forall x \in \mathbb{K}^n : \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ .
2.  $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),$  il existe  $x \in \mathbb{K}^n$  avec  $\|A\| = \|Ax\|$  et  $\|x\| \leq 1$ .
3.  $\|\mathbf{1}_n\| = 1$ .
4. La norme subordonnée  $\|\cdot\|$  est une norme matricielle.

**Remarque.** Puisque  $\|\mathbf{1}_n\|_F \neq 1$ , la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

Soit  $\|\cdot\|_2$  la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur  $\mathbb{K}^n$ .

### Propriétés.

1.  $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \|A\|_2 = \|A^*\|_2 =$  plus grande valeur singulière de  $A$ .
2.  $\forall A, U \in M_n(\mathbb{K})$  avec  $U$  unitaire,  $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$ .
3. En particulier, si  $A$  unitaire,  $\|A\|_2 = \rho(A)$  avec  $\rho(A) = \max.$  des modules des valeurs propres de  $A$  est le **rayon spectral** de  $A$ .

### Théorème

Pour toute norme matricielle  $\|\cdot\|$  sur  $M_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

Réciproquement, soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$  sur  $M_n(\mathbb{C})$  telle que

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$



La suite  $(A_k)_k$  de  $M_n(\mathbb{K})$  tend vers  $A$  si on a  $\|A - A_k\| \rightarrow 0$ .

## Théorème

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\lim_k A^k = 0$ ,
2.  $\forall x \in \mathbb{C}^n, \lim_k A^k x = 0$ ,
3.  $\rho(A) < 1$ ,
4. Il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|$  pour laquelle  $\|A\| < 1$ .

**Remarque.** Soit  $\sum_k a_k z^k$  une série entière de rayon de convergence  $R$ , on en déduit que la même série converge pour une matrice  $A$  avec  $\rho(A) < R$ . Cela permet de construire l'analogie des fonctions classiques  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ...

## Théorème

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle. On a

$$\lim_k \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

## Théorème (Perron-Frobenius)

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  matrice à coefficients positifs. Alors, il existe une valeur propre  $\lambda_F$  de  $A$  telle que

1.  $\lambda_F$  est réelle et positive (ou nulle),
2.  $\forall \lambda$  valeur propre de  $A$ ,  $|\lambda| \leq \lambda_F$  donc  $\lambda_F = \rho(A)$ .

Si de plus on a  $A^k > 0$  pour un entier  $k \geq 1$ , alors

1.  $\lambda_F$  est strictement positive,
2.  $\lambda_F$  admet un vecteur propre à coordonnées strictement positives,
3.  $\forall \lambda$  valeur propre de  $A$ ,  $\lambda \neq \lambda_F \implies |\lambda| < \lambda_F$ ,
4.  $\lambda_F$  est de multiplicité 1 (racine simple du polynôme caractéristique).