Topologie des espaces métriques

espaces vectoriels normé

evn

1. Espaces métriques
2. Fonctions continues
3. Compacité
4. Connexité
5. Complétude

§1.1 Topologie – Espaces métriques

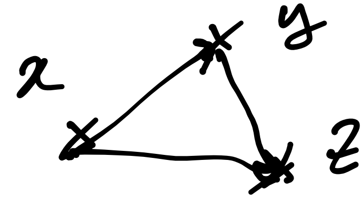
$\mathbb{R}$

Définition

Une distance sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
2. (symétrie) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) est un espace métrique



Définition

Une norme sur un espace vectoriel X (sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) est une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x \in X,\ \|x\| = 0$ ssi $x = 0$
2. (homogénéité) $\forall x \in X,\ \forall \lambda,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé

Résultat. Soit (X, d) espace métrique,

$$\boxed{\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)}$$

Théorème

Soit $(X, \|\cdot\|)$ espace normé alors $d(x,y) = \|x - y\|$ est une distance sur X

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ avec la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. La distance discrète sur tout ensemble X

$$\boxed{d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Définition

Deux distances d_1 et d_2 sur X sont Lipschitz-équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que $\alpha > 0 \quad \frac{1}{\alpha} d_1 < d_2 < \alpha d_1$

$$\forall x, y \in X, \quad m\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y)$$

Définition

Soit (X, d) espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on pose

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{(boule ouverte)}$$
$$B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad \text{(boule fermée)}$$

Une partie A de X est bornée si il existe $M \geq 0$ tel que $\forall a, a' \in A$, $d(a, a') \leq M$, c'est équivalent à demander que A est contenue dans une boule. Pour $A \subseteq X$, une partie bornée, on définit son diamètre par

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

$$\frac{1}{2} d_1 \leq d_\infty \leq d_1$$

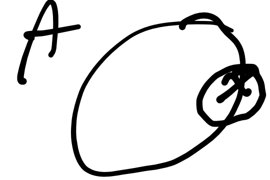
Proposition

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques. Alors on peut définir les deux distances suivantes sur $X \times Y$

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

La distance $\boxed{d_\infty}$ est la distance produit

Résultat. Ces deux distances sont Lipschitz-équivalentes



Définition

Une partie A d'un espace métrique (X, d) est un ouvert si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

Résultat.

Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

même topologie

Théorème

Si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes sur X alors les ouverts de (X, d_1) sont exactement les ouverts de (X, d_2).

Théorème

La famille des ouverts de (X, d) vérifie les propriétés suivantes :

1. *Toute union (arbitraire) d'ouverts est un ouvert*
2. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert*

(Un énoncé équivalent en découle pour les fermés)

Boules ouvertes, boules fermées

Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et r un réel strictement positif. On note $B(x, r)$ (resp. $B_f(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

1. Montrer que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de X.
2. Montrer que l'adhérence de $B(x, r)$ est incluse dans $B_f(x, r)$ et que l'intérieur de $B_f(x, r)$ contient $B(x, r)$.
3. On suppose dans cette question que X est un espace vectoriel normé, muni d'une norme $\| \ \|$. Montrer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
4. Donner un exemple d'un espace métrique (X, d) pour lequel les résultats de la question 3. sont faux.

Définition

La topologie d'un espace métrique (X, d) est l'ensemble des ouverts de X. Si A est une partie de X, la topologie induite est celle donnée par la restriction de d à $A \times A$.
Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, la topologie produit de $X \times Y$ est celle donnée par la distance d_∞ (max. entre d_X et d_Y)

Définition

Une base de la topologie de (X, d) est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X telles que : tout élément de $\mathcal{B}$ est ouvert et tout ouvert (non vide) de X est union (arbitraire) d'éléments de $\mathcal{B}$

Résultat. Les boules ouvertes forment une base de la topologie de (X, d)

A ouvert : $\forall a \in A, \exists r_a > 0$ tq $B(a, r_a) \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$

Définition

Un espace métrique est séparable s'il admet une base de topologie au plus dénombrable

Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit (x_n) converge vers $\ell \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N,\ d(x_n, \ell) \leq \epsilon$$

$a \geq 0$ avec $\forall \varepsilon > 0$, $a < \varepsilon \Rightarrow a = 0$

Résultat. La limite, si elle existe, est unique

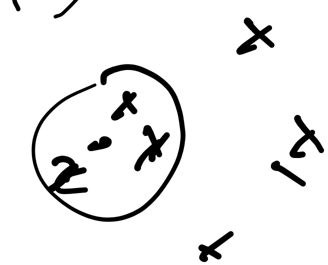
Définition

Une suite extraite d'un suite (x_n) d'éléments de X est une suite de la forme $(x_{f(n)})$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (et donc $\forall n$, $f(n) \geq n$).

$a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Théorème

Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.



Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit que $x \in X$ est valeur d'adhérence de (x_n) si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \geq 0$, $\exists n \geq N$ avec $x_n \in B(x, \epsilon)$. C'est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge vers x.

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ $n = 1, 2, \ldots$

Théorème

Une partie A de l'espace métrique X est ouverte ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers un élément de A, $\exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, on a $x_n \in A$

Théorème

Une partie A de l'espace métrique X est fermée ssi pour toute suite (x_n) convergente d'éléments de A, la limite est dans A

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Définition

Soit A une partie de l'espace métrique X. L'intérieur de A, noté A°, est le plus grand ouvert contenu dans A. L'adhérence de A, noté $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. A est dense dans X si $\bar{A} = X$. La frontière de A, noté δA, est $\delta A = \bar{A} \setminus A^\circ$

Résultat. On a $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$; $A^\circ = A$ ssi A est ouvert ; $\bar{A} = A$ ssi A est fermé.

Théorème

On a $x \in \bar{A}$ ssi $\forall U$ ouvert contenant x, $U \cap A \neq \emptyset$ ssi il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x

Définition

Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit la norme $\| \cdot \|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad p=2$$

et la norme $\| \cdot \|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

Résultat. L'inégalité triangulaire pour ces normes est l'inégalité de Minkowski

Théorème

Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Les normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire il existe $m, M > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, m \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M \|x\|_p$$

et donc les distances correspondantes sont Lipschitz-équivalentes

Normes sur ℓ^2

$x(n) = x_n$

On note

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 < \infty \right\}$$

et pour $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on pose

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\ell^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.
3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?
   (Indication. considérer la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ définie par : $x_k(n) = 1$ si $n \leq k$ et $x_k(n) = 0$ sinon.)

Normes sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On rappelle la définition des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} \|f(x)\|, \quad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Soit $f \in E$. On définit pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(1/n)\,nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in A$.
   2.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. Montrer que A est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Déterminer l'intérieur de A pour $\|\cdot\|_\infty$ puis pour $\|\cdot\|_1$.

§1.2 Fonctions continues

$\delta(\varepsilon, x)$?

Définition

Une fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

f est continue sur $A \subseteq X$ si f est continue en x pour tout $x \in A$

f est uniformément continue sur $A \subseteq X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in A,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

$\delta(\varepsilon)$

Remarque

Définition de continuité : $\delta = \delta_{x,\epsilon}$
Définition de continuité uniforme : $\delta = \delta_{\epsilon}$

Définition

Soit $K > 0$. Une fonction $f : X \to Y$ est K-lipschitzienne $\in X$ si

$$\forall x, x' \in X,\ d_Y(f(x), f(x')) \leq K\, d_X(x, x')$$

Résultat. Lipschitzienne $\overset{1}{\implies}$ uniformément continue $\overset{\text{OK}}{\implies}$ continue

Théorème (Autre caractérisation de la continuité)

Soit $f : X \to Y$.

- *f est continue en $x \in X$ ssi pour tout suite (x_n) suite d'éléments de X de limite x, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$ (caractérisation séquentielle)*
- *f est continue sur X ssi pour tout ouvert U de Y, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de X (caractérisation topologique)*

  Remarque. vérifier pour U dans une base d'ouverts de Y est suffisant

Résultat. La composée, la somme, la multiplication de fonctions continues est continue

$\lim g(x_n) = g(\lim x_n)$

Résultat. Deux fonctions continues qui coïncident sur un ensemble dense sont égales

$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

Théorème

Soit $f : X \to Y \times Z$ (avec le distance d_∞). On note $f = (f_Y, f_Z)$. Alors f est continue ssi f_Y et f_Z sont continues

base d'ouverts $Y \times Z = \{ U \times V : U$ ouvert de Y, V ouvert de $Z \}$