Feuille n^o 1 : Nombres réels

Inégalités et quantification

Exercice 1 Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $(x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $(|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0)$.
5. Pour tout intervalle ouvert I, on a : $\forall x \in I$, $\exists \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.
6. Pour tout intervalle ouvert I, on a : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.
7. $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^*)^2$, $\left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
8. $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_-^*)^2$, $\left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
9. $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,2]$, $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$.
10. $\forall (x,y) \in [-2,-1] \times [2,4]$, $xy \geq -4$.
11. $\exists (x,y) \in]-2,-1[\times]2,4[$, $xy \geq -4$.
12. $\forall (x,y) \in]-2,7[\times]-4,1[$, $-28 < xy < 8$.
13. $\forall (x,y) \in \big([-3,-2] \cup [3,4]\big) \times \big([-4,-1] \cup [1,2]\big)$, $-12 \leq xy \leq 8$.

Bornes supérieures

Exercice 2 Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbf{R}\ :\ x^2 < 2\right\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\ :\ n, p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

$$D = \left\{-y(x^2+1) \colon x \in [-1,0] \text{ et } y \in [-2,-1] \cup [3,4[\right\}.$$

Exercice 3 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telles que $A \subset B$ et B est majorée. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 4 Soit I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles majorées de réels.

1. Montrer que $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est majorée et que
$$\sup_{i\in I}(a_i + b_i) \leq \sup_{i\in I} a_i + \sup_{i \in I} b_i.$$
2. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?
3. On suppose de plus que les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont minorées. Montrer qu'alors la famille $\big(|a_i - b_i|\big)_{i\in I}$ est bornée et que
$$\left|\sup_{i\in I} a_i - \sup_{i\in I} b_i\right| \leq \sup_{i\in I} |a_i - b_i|.$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels convergente.

1. Monter que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que
$$\inf_{n\in\mathbf{N}} u_n \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} u_n.$$
2. Que peut-on dire sur ces inégalités si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone ?
3. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet un maximum.

Exercice 6 Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0;1] \colon f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure b.
2. Montrer que $b = \min E$.
3. Montrer finalement que b est un point fixe de f.

Exercice 7 Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction majorée.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la partie $f(]-\infty, x])$ admet une borne supérieure.

On considère la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $g(x) = \sup f(]-\infty, x])$.

2. Montrer que g est croissante.
3. Montrer que si f est continue alors g l'est également.

Suites adjacentes, monotones, extraites, de Cauchy ...

Exercice 8 Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. Notons ℓ leur limite. Trouver un intervalle d'extrémités rationnelles, contenant ℓ et de longueur inférieure à $0,002$.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que $e = 1 + \ell$ et en déduire une valeur approchée rationnelle de e à $0,002$ près.

Exercice 9

Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donc en particulier convergentes.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est strictement minorée par $\sqrt{2}$.
2. Montrer qu'elle est strictement décroissante.
3. Déterminer sa limite.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent mais pas $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$, $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3k})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Exercice 12 Soit u une suite de nombres réels. On dit que $\lambda \in \mathbf{R}$ est une *valeur d'adhérence* de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers λ.

1. Déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite convergente.
2. Déterminer les valeurs d'adhérences des suites u et v définies pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.
3. Donner un exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
4. Donner un exemple d'une suite qui n'admet pas de valeur d'adhérence.
5. Soit v une suite réelle bornée.
   (a) En utilisant un résultat du cours, montrer que v admet au moins une valeur d'adhérence.

   On suppose maintenant que v n'admet qu'une seule valeur d'adhérence ℓ.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que les intervalles $]-\infty, \ell - \varepsilon]$ et $[\ell + \varepsilon, +\infty[$ ne peuvent contenir qu'au plus un nombre fini de termes de v.

   (c) En déduire que v converge vers ℓ.

Exercice 13

Soit $0 < a < 1$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq a^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 14 Critère de Cauchy pour les fonctions.

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction.

1. Montrer que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
2. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.
3. Montrer, enfin, que f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > a,\ \forall (x, y) \in [A, +\infty[^2,\ \left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Continuité et continuité uniforme

Exercice 15 Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction. Examiner la signification sur f des propriétés suivantes :

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$
3. $\exists \eta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$

Exercice 16 Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbf{R}$.

Exercice 18 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 19 Une caractérisation séquentielle des fonctions uniformément continues.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est uniformément continue sur I ;
2. pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 alors $(f(v_n) - f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 ;
3. pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 alors $(f(v_n) - f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Exercice 20

1. Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
3. Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. Soit $f : [0, 1[\to \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.