Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques

Année universitaire 2022 – 2023 — Analyse 3

Partiel du 19 octobre 2022 - Durée : 1h30

`La rédaction est importante, nous allons en tenir compte dans la correction.`

Exercice 1 `Question de cours`

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercice 2 `Borne supérieure`

On considère l'ensemble X suivant :

$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; \quad n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 3 `Etude d'une suite`

Soit $a \in]0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 `Autour de la continuité`

1. Le but de cette question est de montrer qu'une fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$ est uniformément continue.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $A \geq 0$ tel que
   $$\forall x, y \geq A, \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
   (b) Montrer qu'il existe $\delta \in]0,1[$ tel que
   $$\forall x, y \in [0, A+1], \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
   (c) En déduire que
   $$\forall x, y \in [0,+\infty[, \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon,$$
   et conclure.
2. Dire si la fonction $\begin{array}{rccc} g : & [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & 1/x \end{array}$ est uniformément continue.