Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Analyse 3

Feuille n° 2 : Intégrales sur un segment

Exercice 1 (Intégrabilité des fonctions monotones)
On considère une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbf{R}$.
Soit un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une subdivision régulière $x_0, \ldots, x_n$ du segment $[a,b]$:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = b.$$

.

On pose $u : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x_i) \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n \\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases} \end{array}$

et $U : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(a) \text{ si } x = a \\ f(x_{i+1}) \text{ si } x_i < x \leq x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n. \end{cases} \end{array}$

1. Représenter graphiquement u et U.
2. Calculer $\displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b U(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_a^b (U-u)(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que f est intégrable.
5. Montrer que la somme de Riemann $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
6. Donner un exemple de fonction monotone sur un segment qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice 2 On considère une fonction positive et intégrable $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Montrer que si f est continue alors f est identiquement nulle.
2. Montrer que si f est continue par morceaux alors f est nulle partout sauf en au plus un nombre fini de points.

On considère $g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ s'il existe } n \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } x = 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$

3. Montrer que g est intégrable et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \to f(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt \to 0$.

Exercice 4

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^2+11}{(X^2-X-2)(X^2+1)}.$$

2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $f :]-1,2[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \in]-1,2[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+11}{(x^2-x-2)(x^2+1)}$.

Exercice 5

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t\,\mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$ calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 On note $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\right\}$.

1. Représenter graphiquement les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$, ainsi que D.
2. Montrer que l'aire de D vaut $\sqrt{2}-1$.

Exercice 7 (Intégrales de Wallis)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. (a) Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n > 0$.

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (I_n) converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

3. (a) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Montrer que $\ell = 0$.

4. En utilisant les questions précédentes :

(a) Montrer que la suite (I_{n+1}/I_n) converge vers 1.

(b) En déduire que la suite $\big(n(I_n)^2\big)$ converge vers $\pi/2$.

5. Le but de cette dernière question est de montrer par une méthode plus directe que la suite (I_n) converge vers 0 :

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi/2[$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

i. $0 \leq \displaystyle\int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon$;

ii. $0 \leq \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \, \mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n$.

(b) Conclure.

Exercice 8 On définit une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \quad \text{pour } t \in]0,1[, \quad f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\,.$$

On définit également une application $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\,.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.
2. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. (a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2$.

   (b) Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.

   (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{x\to 1^-} F(x)$.

   (d) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.
5. En déduire enfin la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 9 Calculer les limites des suites $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par
$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=0}^{n}(n^2+k^2)^{1/n}.$$

Exercice 10 On rappelle/admet que comme la fonction ln est concave, on a l'inégalité de Jensen suivante : si $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ sont des n-uplets de réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$.

Soient f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
2. En déduire que
$$\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t \leq \ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Quelques exercices de calculs pour réviser et vous entraîner :

Exercice 11 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$

Exercice 12 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}\,x)^2\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\;dx}{1+\cos^2 x}$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x}$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \cos\theta$)

(i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$)