Feuille n° 3 : Intégrales impropres

Exercice 1 Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou pas, et calculer la valeur dans le cas de convergence :

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ (discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)

(f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt$ **(g)** $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ **(h)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Exercice 2 Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Exercice 3 Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\left(2+3\cos^9 x\right)\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt$ **(f)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 4 On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+8x+20}$.

(a) Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue sur $\mathbb{R}$?

(b) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge vers $+\infty$.

(c) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+8x+20)^2}$ converge.

Exercice 5 La fonction gamma.

(a) Prouver la convergence, pour $a>0$ fixé, de l'intégrale généralisée

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

(b) Montrer que, pour tout $a>0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 6 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$.

Montrer que si l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge alors $\ell = 0$.

La condition $\ell = 0$ suffit-elle à garantir la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$?

(b) Donner un exemple de fonction continue $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ à valeurs positives et non bornée (et donc telle que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$) telle que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge.

Exercice 7 Intégrales de Bertrand. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On veut étudier la nature de l'intégrale impropre

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt.$$

(a) On suppose $\alpha > 1$.

Montrer qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.

En déduire la convergence de l'intégrale étudiée.

(b) On suppose $\alpha = 1$.

Soit $x>e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt$.

Déterminer pour quels $\beta\in\mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.

(c) On suppose enfin $\alpha < 1$.

Déterminer la limite de $\dfrac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

En déduire la nature de l'intégrale étudiée.

Exercice 8 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^a}\,dt$.

Exercice 9 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cosh x-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,dx$

Exercice 10 Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x+e^{\alpha x})\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx$ où $\alpha\in[-4,+\infty[$.

Exercice 11 Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(\operatorname{th} t)\,dt$.

Exercice 12 (a) Montrer que l'intégrale impropre suivante converge : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

(b) On montre maintenant que l'intégrale n'est que semi-convergente.

1. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\sin t|\geq \sin^2 t$.
2. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y}\,dy$ diverge.

(c) On va maintenant calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

1. Montrer que la fonction $f(y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{\sin(y)}$ est prolongeable en une fonction C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et en déduire que $\int_0^{\pi/2} f(y)\sin(ny)\,dy$ tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$.
2. Pour tout entier $n\geq 0$, on pose $J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ny)}{\sin(y)}\,dy$. Trouver une relation entre J_n et J_{n-2} et en déduire la valeur de J_n.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

Exercice 13 [Pour aller plus loin - Hors programme de l'UE]

Dans cet exercice nous démontrons le théorème d'Abel sur les intégrales impropres et l'appliquons à l'étude d'intégrales semi-convergentes. Le théorème d'Abel est l'énoncé suivant :

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit $g:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue dont la primitive $G: \begin{array}{rcl}[a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt\end{array}$ est bornée.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que la fonction $x\mapsto f(x)G(x)-f(a)G(a)$ admet une limite en $+\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ est absolument convergente.
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge.
4. Montrer que pour tout $\alpha\in]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ est semi-convergente.
5. En déduire que *l'intégrale de Fresnel* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ est semi-convergente.

Exercice 14 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)dt}{1+t^2}$$

converge. Grâce à un changement de variables simple, montrer qu'elle est nulle. En déduire que, pour tout $a>0$,

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$