Examen du 11 janvier 2022 - Durée : 2h - Corrigé

Exercice 1 `Question de cours`

Considérons une partie non vide minorée A de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition d'un minorant de A.

   Solution : Un minorant de A est un réel m tel que pour tout $a \in A$, $m \leq a$.

2. Rappeler la définition de la borne inférieure de A.

   Solution : La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A (qui existe d'après l'axiome de la borne supérieure).

3. Énoncer et prouver la caractérisation séquentielle[1] de la borne inférieure de A.

   Solution :
   - Énoncé : un minorant m de A est la borne inférieure de A si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers m.
   - Preuve : supposons que m est la borne inférieure de A. Soit $n \geq 1$ un entier. Comme m est le plus grand des minorants de A et $m + 1/n > m$, le réel $m + 1/n$ ne minore pas A et il existe un élément a_n de A tel que $a_n < m + 1/n$. On peut ainsi considérer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A telle que pour tout $n > 0$, $a_n < m + 1/n$. Comme m est un minorant de A, on a également pour tout $n > 0$, $m \leq a_n$ et l'ensemble de ces inégalités impliquent que la suite (a_n) converge m.

     Supposons réciproquement que m est un minorant de A et qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers m. Soit m' un autre minorant de A. Alors pour tout n, on a $m' \leq a_n$ et en passant à la limite, $m' \leq m$. Ainsi, m est le plus grand minorant de A, c'est-à-dire sa borne inférieure.

Exercice 2 `Comparaison avec une série de Bertrand`

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^2} + (\ln n)^2 + \sqrt{n}}{n^{5/3}(\ln n)^2}$.

Solution : Remarquons qu'il s'agit d'une série à termes strictement positifs. Par croissances comparées, on a au voisinage de l'infini $\sqrt[3]{n^2} + (\ln n)^2 + \sqrt{n} \sim n^{2/3}$ et ainsi

$$\frac{\sqrt[3]{n^2} + (\ln n)^2 + \sqrt{n}}{n^{5/3}(\ln n)^2} \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente (cas $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$) et par le théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^2} + (\ln n)^2 + \sqrt{n}}{n^{5/3}(\ln n)^2}$ est également convergente.

1. à l'aide d'une suite

Exercice 3 `Intégrales impropres`

1. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x$.
   Solution : Pour $x > 1$, on a $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x = \ln(x(1+1/\sqrt{x})) - \ln x = \ln(1+1/\sqrt{x})$. Au voisinage de 0, $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ et ainsi, par l'égalité précédente, on obtient l'équivalent suivant au voisinage de $+\infty$:
   $$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}\,dx$.
   Solution : Notons que la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}$ est définie, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$ (la stricte positivité vient du fait que ln est strictement croissante). Par la question précédente, f est équivalente au voisinage de $+\infty$ à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}\sqrt{x}}$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}\,dx$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$, qui est convergente car $5/4 > 1$.

3. Montrer que pour tout $x \in]0,1/4[$, on a
   $$0 < \ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln x < -\ln x.$$
   Solution : Rappelons que pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x > 0$ par stricte croissance de ln. Soit $x \in]0,1/4[$, alors $x+\sqrt{x} < 1/4 + 1/2 = 3/4 < 1$ et donc $\ln(x+\sqrt{x}) < 0$ ce qui permet de conclure.

4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}\,dx$.
   Solution : D'après la question précédente, pour $x \in]0,1/4[$, on a $0 < f(x) < \dfrac{-\ln x}{x^{3/4}}$. Or, l'intégrale de Bertrand (en 0) $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$ est convergente[2] car $3/4 < 1$. La fonction f étant continue et strictement positive sur $]0,1]$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}\,dx$ qui est convergente par comparaison avec l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$.

Exercice 4 `Une série alternée`

Pour $n \geq 1$, on pose
$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

2. On peut le justifier à nouveau par une simple intégration par parties, ou par comparaison avec un intégrale de Riemann.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour chaque $n \geq 1$, on a

$$a_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt.$$

Solution : Soit $n \geq 1$. On pose $t = x - n\pi$ (changement de variable linéaire) et comme pour tout réel t, on a $\sin(t+n\pi) = (-1)^n \sin t$ (car $\sin(t+\pi) = -\sin t$), on obtient

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\,dt = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente.

Solution : Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$.

Soit $n \geq 1$. Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$ et $0 < \frac{1}{t+(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$.. Ainsi, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a

$$0 \leq \frac{\sin t}{t+(n+1)\pi} \leq \frac{\sin t}{t+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$$

et par monotonie de l'intégrale,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

La suite (u_n) est donc une suite à termes positifs et décroissante, qui converge vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ satisfait le critère des séries alternées et est donc convergente.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq |a_n| \leq \frac{2}{n\pi}.$$

Solution : Soit $n \geq 1$. Par ce qui précède $|a_n| = u_n$. De plus, pour $t \in [0,\pi]$, on a $\frac{\sin t}{(n+1)\pi} \leq \frac{\sin t}{t+n\pi} \leq \frac{\sin t}{n\pi}$. À nouveau par monotonie de l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt \leq |a_n| \leq \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt.$$

Or, $\int_0^\pi \sin t\,dt = -\cos\pi + \cos 0 = 2$, ce qui permet de conclure.

4. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est-elle absolument convergente ?

Solution : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(n+1)\pi}$ est divergente et par le théorème de comparaison, il en est de même de $\sum_{n\geq 1} |a_n|$. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 5 `Étude d'une suite et de trois séries`

On fixe un réel $a \in]0, \pi/2[$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \sin(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < u_n < 1$.

   Solution : Montrons ce résultat par récurrence sur n en utilisant le fait que la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$:

   Pour $n = 1$, on a $u_1 = \sin a$ et comme $a \in]0, \pi/2[$, il suit que $\sin 0 < \sin a < \sin(\pi/2)$ et donc $0 < u_1 < 1$.

   Soit $n \geq 1$. Supposons que $0 < u_n < 1$. Alors $\sin 0 < \sin(u_n) < \sin 1 < 1$ et donc $0 < u_{n+1} < 1$.

   On a ainsi montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < u_n < 1$.

2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\sin x < x$.

   Solution : Notons que pour $x > 1$, on a $\sin x \leq 1 < x$. Il reste à vérifier l'inégalité pour $x \in]0, 1]$. Étudions pour cela la fonction $f : x \mapsto x - \sin x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. La fonction f est donc croissante. De plus, comme f' est strictement positive sur $]0, 2\pi[$, la fonction f est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$ (en fait elle l'est sur $\mathbb{R}$). Ainsi, pour tout $x \in]0, 1]$ on a $f(x) > f(0) = 0$, ce qui permet de conclure.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

   Solution : Par la première question, pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$ et par la question précédente, pour tout $n \leq 0$, on a $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite (u_n) est donc (strictement) décroissante et minorée par 0. Elle converge alors vers une limite $\ell \geq 0$. Comme sinus est continue et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, par passage à la limite on a $\sin \ell = \ell$. À nouveau par la question précédente, la limite ℓ est nécessairement nulle.

4. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{6}\, u_n^3$ en $+\infty$.

   Solution : Rappelons qu'au voisinage de 0, on a $\sin t = t - t^3/6 + o(t^3)$. Comme la suite (u_n) converge vers 0, on en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n = u_n - \frac{1}{6}\, u_n^3 - u_n + o(u_n^3) = -\frac{1}{6}\, u_n^3 + o(u_n^3).$$

5. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^3$.

   Solution : Par la question précédente, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^3$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n - u_{n+1})$ qui est une série télescopique convergeant vers $u_0 = a$, car la suite (u_n) converge vers 0.

6. En étudiant un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.

   Solution : Par le développement limité précédent, on a au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1 - \frac{1}{6}\, u_n^2 + o(u_n^2)$$

et comme $\ln(1+t) = t + o(t)$ au voisinage de 0, il suit que

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim -\frac{1}{6}\, u_n^2.$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ est ainsi de même nature que la série télescopique $\sum_{n\geq 0}(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ qui diverge car la suite $(\ln(u_n))$ diverge.

7. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge également.

   Solution : Pour $n \geq 1$, on a $0 < u_n < 1$ et donc $0 < u_n^2 < u_n$. Ainsi, la divergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ entraîne celle de $\sum_{n\geq 0} u_n$.