Examen du 11 janvier 2022 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous allons en tenir compte dans la correction.

Le sujet est constitué de 5 exercices sur 2 pages.

Exercice 1 Question de cours

Considérons une partie non vide minorée A de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition d'un minorant de A.
2. Rappeler la définition de la borne inférieure de A.
3. Énoncer et prouver la caractérisation séquentielle[1] de la borne inférieure de A.

Exercice 2 Comparaison avec une série de Bertrand

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^2}+(\ln n)^2+\sqrt{n}}{n^{5/3}(\ln n)^2}$.

Exercice 3 Intégrales impropres

1. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x+\sqrt{x})-\ln x$.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$.
3. Montrer que pour tout $x\in]0,1/4[$, on a
$$0<\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln x<-\ln x.$$
4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$.

1. à l'aide d'une suite

Exercice 4 `Une série alternée`

Pour $n \geq 1$, on pose

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour chaque $n \geq 1$, on a

$$a_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi}\, dt.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq |a_n| \leq \frac{2}{n\pi}.$$

4. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 5 `Étude d'une suite et de trois séries`

On fixe un réel $a \in]0, \pi/2[$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \sin(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\sin x < x$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
4. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}\, u_n^3$ en $+\infty$.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$.
6. En étudiant un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.
7. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge également.