Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Analyse 3

Exercices de révision en vue du partiel du 19 octobre

Programme de révision :

— Questions de cours : chapitres 1 et 2 du cours, avec en particulier les 4 démonstrations à connaître (caractérisations de la borne supérieure, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Heine, formule d'intégration par parties).

— Exercices de la feuille 1 (suggestions de révision : exercices 2, 3, 10, 11(1), 17, 20.)

— Préparer les exercices suivants pour le 12 octobre qui seront corrigés en amphi Jordan entre 9h45 et 11h30.

Exercice 1 [1]

Déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

$$X = \left\{e^{-m} + 1;\ m \in \mathbf{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{\frac{1}{n} + \frac{m}{n+m};\ (m,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\right\}.$$

Exercice 2

1. On considère la fonction définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in \mathbf{R}_+$ que l'on déterminera.
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{R}_+^*$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbf{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que fg est également uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que
$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ |y - x| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |f(y)g(y) - f(y)g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
2. Montrer de même qu'il existe $\delta_2 > 0$ tel que
$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ |y - x| \leqslant \delta_2 \Rightarrow |f(y)g(x) - f(x)g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
3. Conclure.
4. Donner un exemple de deux fonctions uniformément continues dont le produit ne l'est pas.

---

1. Cet exercice et le suivant sont des extraits d'annales.